Feuille d'exercices #2

Exercice 1 *Autour de la propriété de Markov simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. Pour tout $y \in \mathbb{E}$, on note $T_y := \inf\{n \geq 0,\, X_n = y\}$. Établir les relations suivantes :

i) $Q_n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_y = m) Q_{n-m}(y,y)$;

ii) $\mathbb{P}_x(T_y = n+1) = \sum_{z\neq y} Q(x,z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$;

iii) $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = Q(x,y) + \sum_{z\neq y} Q(x,z)\mathbb{P}_z(T_y < +\infty)$.

Exercice 2 *Excursions d'une marche aléatoire simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 := 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose $T_0^0 := 0$ et par récurrence, on définit $T_0^{n+1} := \inf\{n > T_0^n,\, S_n = 0\}$ le temps $n+1-$ième temps de retour en zéro de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la loi de $\Delta_0^n := T_0^{n+1} - T_0^n$ ne dépend pas de n.
2. Montrer que les excursions $(S_{T_0^k}, \ldots, S_{T_0^{k+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d.

Exercice 3 *Pour se faire la main*
Sur les espaces d'états $\{1,2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, on considère des chaînes de Markov de matrices de transitions respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transitoires et les classes de récurrence de ces chaînes.

Exercice 4 *Classification et probabilités d'absorption I*
Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$Q := \begin{pmatrix} 4/10 & 3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 5/10 & 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents, transitoires ?
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.

Exercice 5 *Classification et probabilités d'absorption II*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer quels sont les états transitoires et les états récurrents.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.

Exercice 6 *Ruine du petit joueur*
A joue contre B une suite de pile ou face non biaisés et indépendants. À chaque partie, le joueur qui gagne reçoit 1 euro, l'autre en perd un. La somme de leurs fortunes, constante au cours du jeu, est de 4 euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On modélise l'évolution de la fortune de A par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dont la matrice de transition donnée ci-dessous. On admettra que lorsque n tend vers l'infini, la puissance $n-$ième de la matrice Q converge vers la matrice Q_∞ également donnée ci-dessous.

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\infty := \lim_{n\to+\infty} Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Établir la classification des états de la chaîne ?
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
3. Si $X_0 \sim \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, déterminer la loi de X_∞.
4. Montrer que tout probabilité invariante π pour la chaîne est nécessairement de la forme $\pi = (p, 0, 0, 0, 1-p)$, avec $p \in [0, 1]$.
5. Calculer les probabilités que le joueur A gagne le jeu, en fonction de sa fortune initiale $X_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
6. Question facultative : en déduire la durée moyenne de la partie, conditionnellement à ce que le joueur A gagne le jeu, en fonction de $X_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 7 $\Sigma\iota\sigma\upsilon\varphi o\varsigma$
Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, et dont la matrice de transition est donnée par $Q(n, n+1) = \theta_n$ et $Q(n, 0) = 1 - \theta_n$, où $0 < \theta_n < 1$ pour $n \geq 0$.

1. Étudier la nature de l'état 0, puis des autres états.
2. Existe-t-il une mesure réversible, invariante ?