Feuille de révision sur les classes monotones

Quelques (r)appels : dans toute la suite, Ω désigne un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de ses parties.

- Une famille d'ensembles $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est appelée $\pi-$système si elle est stable par intersection finie, i.e. si $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$ alors $A \cap B \in \mathcal{C}$.
- Une famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est appelée classe monotone, ou $\lambda-$système, si elle vérifie les propriétés suivantes :
  1. $\Omega \in \mathcal{M}$;
  2. $\mathcal{M}$ est stable par différence i.e. si $A \subset B \in \mathcal{M}$, alors $B \backslash A = B \cap A^c \in \mathcal{M}$;
  3. $\mathcal{M}$ est stable par union croissante dénombrable, i.e. si $A_j \in \mathcal{M}$, $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ alors $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$.
- On vérifie alors aisément qu'une classe monotone est stable par passage au complémentaire (faire $B = \Omega$ dans le point 2.) et par intersection dénombrable décroissante (passer au complémentaire dans le point 3.). Ainsi, une classe monotone est stable par limite monotone d'ensembles, d'où la terminologie.
- Une tribu est un exemple de classe monotone.
- Une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.
- Une intersection (quelconque) de classes monotones est encore une classe monotone. Ainsi, si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on peut considérer la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega),\, \mathcal{E} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ classe monotone}}} \mathcal{M},$$

  c'est-à-dire la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{E}$.

Le résultat important suivant, connu sous le nom de lemme des classes monotones ou encore théorème $\pi - \lambda$ de Dynkin, fait le lien entre tribu engendrée et classe monotone engendrée dans le cas des $\pi-$systèmes.

Théorème (Lemme des classes monotones)**.** *Si $\mathcal{E}$ est un $\pi-$système, alors $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Exercice 1. Donnez la preuve du lemme des classes monotones.

Exercice 2. *Autour des π et $\lambda-$systèmes*

Déterminez si les familles d'ensembles suivants sont des $\pi-$systèmes ou/et des classes monotones.

1. La famille $\mathcal{E}$ constituée des unions finies disjointes d'intervalles du type $]a, b] \subseteq \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
2. La famille $\mathcal{E} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ au plus dénombrable}\} \cup \mathbb{R}$.
3. La famille $\mathcal{E} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |A| < \infty\} \cup \mathbb{N}$.
4. La famille $\mathcal{E}$ constituée des compacts d'un espace topologique séparé.

Exercice 3. *Indépendance de tribus*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{F}$ deux familles d'événements de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Supposons que les familles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont stables par intersection. Montrer que les deux familles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont indépendantes si et seulement si les tribus $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{E}_1)$ et $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{E}_1)$ qu'elles engendrent sont indépendantes.
2. Montrer par un exemple que l'hypothèse de stabilité par intersection est nécessaire.

Exercice 4. *Identification de deux probabilités*

Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

1. Montrer que $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ est une classe monotone. Est-ce une tribu ?
2. On suppose que $\mathcal{M}$ est un $\pi-$système et que $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{F}$. Montrer que l'on a alors $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ sur la tribu ambiante $\mathcal{F}$.

Exercice 5. *Identification de mesures*

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, finies sur tout compact. On suppose que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue, à valeurs positives et de support compact,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathrm{d}\mu_2.$$

On veut montrer que $\mu_1 = \mu_2$.

1. Montrer que la classe $\mathcal{C}$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ est un π-système.
2. Soit U est ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues positives à support compact telle que
$$\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n = \mathbf{1}_U.$$
En déduire que μ_1 et μ_2 coïncident sur les ouverts.
3. Montrer que μ_1 et μ_2 coïncident sur les boréliens bornés (On pourra utiliser le théorème d'unicité démontré en exercice 2). En déduire que les deux mesures coïncident sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Exercice 6. *Version fonctionnelle du lemme de classes monotones*

Soit H un espace vectoriel de fonction réelles bornées sur un ensemble Ω et soit $\mathcal{E}$ un $\pi-$système contenant Ω. On suppose que

1. $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{1}_A \in H$,
2. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives de H convergeant vers une fonction f bornée, alors $f \in H$.

Montrer que H contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{E})-$mesurables.