FEUILLE DE RÉVISION SUR LES VECTEURS GAUSSIENS

Quelques (r)appels :

- On dit qu'une variable aléatoire réelle X est suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, ou encore est une variable gaussienne centrée réduite, si elle admet la densité f_X suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Sa fonction caractéristique φ_X, i.e. sa transformée de Fourier, est alors donnée par la formule
$$\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X}] = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$
- On dit qu'une variable aléatoire réelle X est suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, ou encore est une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2, si elle admet la densité f_X suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Sa fonction caractéristique φ_X est alors donnée par la formule
$$\varphi_X(\xi) = e^{i\xi m} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\xi^2}.$$
- Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$, alors $(X-m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Si $X_n \sim \mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)$ alors $X_n \overset{loi}{\to} X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ lorsque $n \to +\infty$ ssi $m_n \to m$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.
- On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1,\ldots,X_d)$ de $\mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si pour tout vecteur $a = (a_1,\ldots,a_d) \in \mathbb{R}^d$, la variable réelle $a \cdot X = \langle a, X\rangle = \sum_{i=1}^d a_i X_i$ est une variable gaussienne.
- La loi d'un vecteur gaussien $X = (X_1,\ldots,X_d)$ est caractérisée par la seule donnée de la moyenne $m = (\mathbb{E}[X_1],\ldots,\mathbb{E}[X_d])$ et de la matrice de covariance $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{1\le i,j\le d}$ où $\Sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(X_i,X_j) := \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$. On note alors $X \sim \mathcal{N}(m,\Sigma)$.
- Il existe un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ ssi la matrice Σ est symétrique et positive, i.e. $x^t\Sigma x \ge 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$
- Le vecteur gaussien $X = (X_1,\ldots,X_d) \sim \mathcal{N}(m,\Sigma)$ admet une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $\det(\Sigma) \neq 0$ auquel cas, celle-ci est donnée par la formule :
$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t\Sigma^{-1}(x-m)\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
Sa fonction caractéristique est quant à elle donnée par
$$\varphi_X(\xi) = e^{i\xi\cdot m} e^{\frac{1}{2}\xi^t\Sigma\xi}.$$
- Deux vecteurs gaussiens $X = (X_1,\ldots,X_d)$ et $Y = (Y_1,\ldots,Y_r)$ sont indépendants ssi $\mathrm{cov}(X_i,Y_j) = 0$ pour tout $1 \le i \le d$, $1 \le j \le r$.
- Si X est gaussien $\mathcal{N}(m,\Sigma)$ et si A est une matrice, alors $AX \sim \mathcal{N}(Am, A\Sigma A^t)$. En particulier, si la matrice de covariance Σ est inversible et si $\sqrt{\Sigma^{-1}}$ est une racine carrée de son inverse, on a $\sqrt{\Sigma^{-1}}(X-m) \sim \mathcal{N}(0,\mathrm{Id})$.

Exercice 1 *Un huitième de tour de chauffe*

On considère une matrice $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, où ρ est un réel tel que $|\rho| < 1$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur aléatoire gaussien $X = (X_1, X_2)^t$ centré et de matrice de covariance Σ.
2. On pose $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$. Montrez que le vecteur $Y = (Y_1, Y_2)^t$ est un vecteur gaussien et précisez sa matrice de covariance.
3. Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
4. Explicitez la densité de Y.

Exercice 2 *Méthode de Box-Muller*

Soient U_1 et U_2 des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$X := \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2), \quad Y := \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2).$$

1. Quelle est la loi de $X^2 + Y^2$? de Y/X ?
2. Montrer que $(X, Y)^t$ est un vecteur gaussien centré et précisez sa matrice de covariance.

Exercice 3 *Invariance par les isométries*

Si X est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\sigma^2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}$ et si O est une matrice orthogonale, quelle est la loi du vecteur $Y = OX$?

Exercice 4 *Un contre exemple à marginales gaussiennes*

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $a > 0$. On définit une nouvelle variable $X^{(a)}$ de la façon suivante :

$$X^{(a)} = X\mathbb{1}_{|X|>a} - X\mathbb{1}_{|X|\leq a}.$$

1. Montrez que $X^{(a)}$ est une variable gaussienne.
2. Montrez qu'il existe un réel positif b tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b x^2 e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{4}.$$

3. Calculer la covariance de X et $X^{(b)}$. Le vecteur $(X, X^{(b)})$ est-il gaussien ?

Exercice 5 *Pile ou face*

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\varepsilon \sim \mathcal{B}(p)$ une variable de Rademacher i.e. une variable de Bernoulli à valeurs dans $\{\pm 1\}$, indépendante de X. On pose $Y := \varepsilon X$.

1. Quelle est la loi de Y ? Le vecteur $(X, Y)^t$ est-il gaussien ?
2. Montrer que quel que soit $p \in [0, 1]$, les variables X et Y ne sont pas indépendantes, mais que pour p bien choisi, $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 6 *Statistiques gaussiennes*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On considère les nouvelles variables

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad R_n := \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

1. Montrer que le vecteur $(\bar{X}_n, R_n)$ est gaussien et précisez sa loi.
2. Montrer que les variables $\bar{X}_n$ et $\max_{1\leq i\leq n} X_i - \min_{1\leq i\leq n} X_i$ sont indépendantes.