Contrôle continu #1

Durée : 3 heures, aucun document autorisé

Suggestions d'exercices sur l'espérances conditionnelle

Exercice 1. *Parties entière et fractionnaire d'une variable exponentielle*
Pour $x > 0$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \text{et} \quad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. X admet la densité $x \mapsto e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On note $Y := \lfloor X \rfloor$, et $Z := \{X\}$ de sorte que $X = Y + Z$.

1. En calculant $\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s, t])$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$, déterminer la loi du couple (Y, Z). Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer (sans calcul ou presque !) les espérances conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{E}(Y|Z), \ \ \mathbb{E}(Z|Y), \ \ \mathbb{E}(Y|X), \ \ \mathbb{E}(Z|X), \ \ \mathbb{E}(X|Y), \ \ \mathbb{E}(X|Z).$$

   On pourra utiliser les formules :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}, \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

Exercice 2. *Conditionnement gaussien*
Soit ${}^t(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X^3 | X^2]$.
2. Quelle est la densité du vecteur (Y, Z) ? Sa fonction caractéristique ?
3. Sans calcul, déterminer $\mathbb{E}[Y|Z]$ et $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|Z])^2]$.
4. Déterminer $\mathbb{E}[X|(Y, Z)]$.

Exercice 3. *La prochaine est rouge*
On prend un jeu de 52 cartes, dont on retourne les cartes une à une. Le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "la prochaine est rouge"; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd.

On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. Pour $n = 0, \dots, 51$, on note R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'évènement "la $n-$ième carte retournée est rouge".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j)$, pour $j \in \{2, \dots, 26\}$ et $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j|R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$ et $j \in \{0, \dots, 26\}$, où on a posé $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$.
3. Montrer que, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$,
$$\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}.$$
4. Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \dots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
5. On définit $\tau \in \{0, \dots, 51\}$ le temps où le joueur dit "la prochaine est rouge" avant de retourner la $(n + 1)-$ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.

Exercice 4. *Victoires consécutives dans un jeu de pile ou face*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec $0 < p < 1$. On désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique associée. On note τ le premier temps d'apparition de la séquence 111, c'est-à-dire $\tau = \inf\{k \geq 3,\ X_{k-2} = X_{k-1} = X_k = 1\}$ et $\tau_n := \tau \wedge n$. On définit alors pour $n \geq 3$:
$$Y_n := \frac{1}{p^3} \sum_{k=3}^{n} \mathbb{1}_{X_{k-2}=X_{k-1}=X_k=1} + \frac{1}{p^2} \mathbb{1}_{X_{n-1}=X_n=1} + \frac{1}{p} \mathbb{1}_{X_n=1}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'il est fini presque sûrement.
2. Montrer que la suite $(Y_n - n)_{n\geq 3}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 3}$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[Y_{\tau_n}] = \mathbb{E}[\tau_n]$ pour tout $n \geq 3$.
4. En déduire que
$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[Y_\tau] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}.$$
5. Généraliser le résultat au temps moyen d'attente de la première apparition d'une suite de 1 consécutifs de longueur r.

Exercice 5. *Formes quadratiques et martingales*
Soient $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille infinie de nombres réels, à laquelle on pourra penser comme une "matrice infinie". On considère alors la suite

$$Q_n := \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} X_i X_j,$$

ainsi que la trace $A_n := \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}$. On va montrer le résultat suivant :

Théorème (Varberg, 1966)**.** *On suppose que les variables (X_i) sont centrées réduites et admettent un moment d'ordre 4, i.e.*

$$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \mathbb{E}[X_1^2] = 1, \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[X_1^4] < +\infty.$$

Si $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{i,j}^2 < \infty$, alors la limite $\lim_{n\to+\infty}(Q_n - A_n)$ existe et elle est finie presque sûrement.

Il s'agit ici d'utiliser la méthode des martingales.

1. Sans perdre en généralité, on peut supposer la matrice $(a_{i,j})$ symétrique i.e. $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. Pourquoi ?
2. Montrer que la suite $(Q_n - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.
3. On décompose $Q_n - A_n$ de la façon suivante : $Q_n - A_n = 2U_n + V_n$ où

$$U_n := \sum_{0\leq i<j\leq n}^{n} a_{i,j} X_i X_j, \quad V_n := \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}[X_i^2 - 1].$$

   Montrer que les suites U_n et V_n sont bornées dans $\mathbb{L}^2$, c'est-à-dire :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[U_n^2] < +\infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[V_n^2] < +\infty.$$

4. En déduire que $(Q_n - A_n)_{n\geq 0}$ est elle-même bornée dans $\mathbb{L}^2$ et conclure.