Contrôle continu #1

Durée : 3 heures, aucun document autorisé

Suggestions d'exercices sur l'espérances conditionnelle

Exercice 1. *Parties entière et fractionnaire d'une variable exponentielle*
Pour $x > 0$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \text{et} \quad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. X admet la densité $x \mapsto e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On note $Y := \lfloor X \rfloor$, et $Z := \{X\}$ de sorte que $X = Y + Z$.

1. En calculant $\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s, t])$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$, déterminer la loi du couple (Y, Z). Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
   Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$, on a
   $$\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s, t]) = \mathbb{P}(k + s \leq X \leq k + t) = \int_{k+s}^{k+t} e^{-x} dx = e^{-k}(e^{-s} - e^{-t}),$$
   dont on déduit que
   $$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [0, 1]) = e^{-k}(1 - e^{-1}),\ i.e.\ Y + 1 \sim \mathcal{G}(p) \text{ avec } p = 1 - e^{-1},$$
   $$\mathbb{P}(Z \in [s, t]) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s, t]) = \frac{e^{-s} - e^{-t}}{1 - e^{-1}},\ i.e.\ Z \text{ a pour densité } x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}.$$
   En particulier, on a $\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s, t]) = \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}(Z \in [s, t])$ et les variables Y et Z sont indépendantes.
2. Déterminer (sans calculs ou presque !) les espérances conditionnelles suivantes :
   $$\mathbb{E}[Y|Z],\ \mathbb{E}[Z|Y],\ \mathbb{E}[Y|X],\ \mathbb{E}[Z|X],\ \mathbb{E}[X|Y],\ \mathbb{E}[X|Z].$$
   On a tout d'abord
   $$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1, \quad \mathbb{E}[Z] = \int_0^1 \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-1}} dx = \frac{1 - 2e^{-1}}{1 - e^{-1}},$$
   et comme $X = Y + Z$, on en déduit que $\mathbb{E}[Y] = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$. Ensuite
   - comme Y et Z sont indépendantes, il vient $\mathbb{E}[Y|Z] = \mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[Z|Y] = \mathbb{E}[Z]$,
   - puisque $Y := \lfloor X \rfloor$ et $Z := \{X\}$ sont $\sigma(X)-$mesurables : $\mathbb{E}[Y|X] = Y$, $\mathbb{E}[Z|X] = Z$,
   - enfin comme $X = Y + Z$: $\mathbb{E}[X|Y] = Y + \mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{E}[X|Z] = Z + \mathbb{E}[Y]$.

Exercice 2. *Espérance conditionnelle gaussienne*

Soit ${}^t(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X^3|X^2]$.

   La variable X est une gaussienne centrée de variance 4, on note f_X sa densité : c'est une fonction paire sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, on sait qu'il existe une fonction mesurable φ telle que $\mathbb{E}[X^3|X^2] = \varphi(X^2)$ et il s'agit ici d'expliciter φ. Par définition de l'espérance conditionnelle, pour toute fonction g mesurable bornée, on a

$$\mathbb{E}[X^3 g(X^2)] = \mathbb{E}[\varphi(X^2)g(X^2)].$$

   Dans le membre de gauche, l'intégrande est intégrable et impaire, on a donc

$$\mathbb{E}[X^3 g(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} x^3 g(x^2) f_X(x) dx = 0.$$

   Ainsi, la fonction $\varphi \equiv 0$ convient et on conclut par unicité de l'espérance conditionnelle que $\mathbb{E}[X^3|X^2] = 0$ p.s..

2. Déterminer la densité du couple (Y, Z) ainsi que sa fonction caractéristique.
   La couple (Y, Z) est un vecteur gaussien centré et il a pour matrice de covariance la matrice diagonale $\Gamma_{(Y,Z)} := \text{diag}(2, 1)$ qui est inversible. On en déduit que (Y, Z) admet bien une densité $f_{(Y,Z)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{aligned} f_{(Y,Z)}(y, z) &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma_{(Y,Z)})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(y, z)\Gamma_{(Y,Z)}^{-1}{}^t(y, z)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \exp\left(-\frac{y^2/2 + z^2}{2}\right) \end{aligned}$$

   La fonction caractéristique $\psi_{(Y,Z)}$ est quant à elle donnée par

$$\begin{aligned} \psi_{(Y,Z)}(y, z) &= \exp\left(-\frac{1}{2}(y, z)\Gamma_{(Y,Z)}^t(y, z)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2y^2 + z^2}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Sans calcul, déterminer $\mathbb{E}[Y|Z]$ et $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|Z])^2]$.
   On lit sur la matrice $\Gamma_{(Y,Z)}$ que la covariance entre Y et Z est nulle, les variables sont donc indépendantes et $\mathbb{E}[Y|Z] = \mathbb{E}[Y] = 0$ puis $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|Z])^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 2$.

4. Calculer $\mathbb{E}[X|(Y, Z)]$.
   D'après le cours, on a

$$\mathbb{E}[X|(Y, Z)] = \Gamma_{X,(Y,Z)}\Gamma_{(Y,Z)}^{-1}{}^t(Y, Z) = (1, -1) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t(Y, Z) = \frac{Y}{2} - Z.$$

Exercice 3. *La prochaine est rouge*
On prend un jeu de 52 cartes, dont on retourne les cartes une à une. Le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire “la prochaine est rouge” ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd.

On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. Pour $n = 0, \dots, 51$, on note R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'évènement “la $n-$ième carte retournée est rouge”.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j)$, pour $j \in \{2, \dots, 26\}$ et $n \in \{0, \dots, 50\}$.
   On remarque tout d'abord qu'après avoir retourné n cartes, le jeu en contient encore $52-n$, et si $R_n = j$, alors le jeu contient j cartes rouges. On a donc
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j) = \frac{j}{52-n}, \quad \text{pour} \quad j \in \{0, \dots, 26\}.$$

2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j|R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j|\mathcal{F}_n)$, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$ et $j \in \{0, \dots, 26\}$, où on a posé $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$.
   La loi conditionnelle de R_{n+1} sachant R_n est concentrée sur l'ensemble $\{R_n, R_n - 1\}$ et
   $$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1|R_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}|R_n) = \frac{R_n}{52-n}, \quad \mathbb{P}(R_{n+1} = R_n|R_n) = 1 - \frac{R_n}{52-n}.$$

3. Montrer que, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$, $\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = R_n - \dfrac{R_n}{52-n}$.
   On a $\mathbb{P}(R_{n+1} = j|R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j|\mathcal{F}_n)$, donc $\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(R_{n+1}|R_n)$ d'où le résultat via la question précédente.
4. Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \dots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
   La suite $X_n := \mathbb{P}(A_{n+1}|R_n)$ est bornée donc intégrable, elle est bien sûr adaptée à $\mathcal{F}_n$ et
   $$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{52-n-1}\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{52-n-1} \times \left(R_n - \frac{R_n}{52-n}\right) = X_n.$$

5. On définit $\tau \in \{0, \dots, 51\}$ le temps où le joueur dit “la prochaine est rouge” avant de retourner la $(n+1)-$ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.
   Le joueur peut décider de dire la phrase fatidique seulement sur la base des cartes déjà retournées, c'est-à-dire que $\{\tau = n\}$ est inclus dans $\sigma(R_0, \dots, R_n) = \mathcal{F}_n$ et τ est donc un temps d'arrêt. Toute stratégie correspond à choisir un tel temps d'arrêt. La probabilité de victoire est
   $$\mathbb{P}(A_{\tau+1}) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{P}(\{\tau = n\} \cap A_{n+1}) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}}X_n) = \mathbb{E}(X_\tau).$$
   Par le théorème d'arrêt, puisque (X_n) est une martingale et τ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq 51$ *p.s.*), on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) = 1/2$. On conclut que toutes les stratégies se valent et que la probabilité de victoire dans ce jeu est toujours égale à $1/2$.

Exercice 4. *Victoires consécutives dans un jeu de pile ou face*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ à valeurs dans $\{0,1\}$ avec $0<p<1$. On désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique associée. On note τ le premier temps d'apparition de la séquence 111 i.e. $\tau = \inf\{k \geq 3,\ X_{k-2} = X_{k-1} = X_k = 1\}$ et $\tau_n := \tau \wedge n$. On définit alors pour $n \geq 3$:

$$Y_n := \frac{1}{p^3}\sum_{k=3}^{n} \mathbb{1}_{X_{k-2}=X_{k-1}=X_k=1} + \frac{1}{p^2}\mathbb{1}_{X_{n-1}=X_n=1} + \frac{1}{p}\mathbb{1}_{X_n=1}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'il est fini presque sûrement.
   Tout d'abord, si $k \leq 2$, on a naturellement $\{\tau = k\} = \emptyset \in \mathcal{F}_k$ et par ailleurs $\{\tau = 3\} = (X_1, X_2, X_3) = (1,1,1) \in \mathcal{F}_3$. Enfin, si $k > 3$, on a
   $$\{\tau = k\} = \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} X_{k-2} \\ X_{k-1} \\ X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}_{\in \mathcal{F}_k} \bigcap \left(\bigcap_{\ell=3}^{k-1} \underbrace{\{(X_{\ell-2}, X_{\ell-1}, X_\ell = 1) \neq (1,1,1)\}}_{\in \mathcal{F}_\ell \subset \mathcal{F}_k} \right).$$
   Montrons que τ est fini presque sûrement :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=3}^{+\infty} \{(X_{\ell-2}, X_{\ell-1}, X_\ell) \neq (1,1,1)\} \right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=0}^{+\infty} \{(X_{3\ell+1}, X_{3\ell+2}, X_{3\ell+3}) \neq (1,1,1)\} \right) \\ &= \prod_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_{3\ell+1}, X_{3\ell+2}, X_{3\ell+3}) \neq (1,1,1)\right) \\ &\leq \prod_{\ell=0}^{N-1} \mathbb{P}\left((X_{3\ell+1}, X_{3\ell+2}, X_{3\ell+3}) \neq (1,1,1)\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^N, \end{aligned}$$
   et ce pour tout $N \geq 1$. On a donc $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$ i.e. $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.
2. Montrer que la suite $(Y_n - n)_{n\geq 3}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 3}$.
   Pour $n \geq 3$ fixé, la variable Y_n s'exprime comme une fonction mesurable du $n-$uplet $(X_1, \ldots, X_n)$, la suite $(Y_n)_{n\geq 3}$ est donc bien mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 3}$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, en majorant les indicatrices par 1, on a
   $$|Y_n - n| \leq n + |Y_n| \leq n + \frac{n-2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$
   Les variables $Y_n - n$ étant bornées, elles sont intégrables. Enfin, pour $n \geq 3$, on a
   $$\begin{aligned} Y_{n+1} = \quad & Y_n + \frac{1}{p^3}\mathbb{1}_{X_{n-1}=X_n=X_{n+1}=1} \\ & + \frac{1}{p^2}\left(\mathbb{1}_{X_n=X_{n+1}=1} - \mathbb{1}_{X_n=X_{n-1}=1}\right) \\ & + \frac{1}{p}\left(\mathbb{1}_{X_{n+1}=1} - \mathbb{1}_{X_n=1}\right). \end{aligned}$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_n$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \quad & Y_n + \frac{1}{p^3}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n-1}=X_n=X_{n+1}=1}|\mathcal{F}_n\right] \\ & + \frac{1}{p^2}\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=X_{n+1}=1}|\mathcal{F}_n\right] - \mathbb{1}_{X_n=X_{n-1}=1}\right) \\ & + \frac{1}{p}\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}|\mathcal{F}_n\right] - \mathbb{1}_{X_n=1}\right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \quad & Y_n + \frac{1}{p^2}\mathbb{1}_{X_{n-1}=X_n=1} \\ & + \frac{1}{p^2}\left(p\mathbb{1}_{X_n=1} - \mathbb{1}_{X_n=X_{n-1}=1}\right) \\ & + \frac{1}{p}\left(p - \mathbb{1}_{X_n=1}\right) \\ = \quad & Y_n + 1.\end{aligned}$$

Finalement, on a bien $\mathbb{E}[Y_{n+1} - (n+1)|\mathcal{F}_n] = Y_n - n$ i.e. la suite $(Y_n - n)_{n\geq 3}$ est une martingale.

3. Montrer que $\mathbb{E}[Y_{\tau_n}] = \mathbb{E}[\tau_n]$ pour tout $n \geq 3$.
   D'après la première question, les variables τ et τ_n sont des temps d'arrêt. De plus, τ_n est borné par n, d'après le théorème d'arrêt, on a donc

$$\mathbb{E}[Y_{\tau_n} - \tau_n] = \mathbb{E}[Y_3 - 3] = 0,$$

   d'où le résultat.
4. En déduire que

$$\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[Y_\tau] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}.$$

   On remarque qu'au temps $\tau_n \leq \tau$, il y a eu au plus une apparition de 111 donc

$$0 \leq Y_{\tau_n} \leq \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

   D'après la première question, τ est fini presque sûrement et la suite Y_{τ_n}, qui comme on vient de le voir est majorée, converge donc presque sûrement vers Y_τ. Par convergence dominée, on conclut que

$$\mathbb{E}[Y_\tau] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Y_{\tau_n}].$$

   Par ailleurs, d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}[\tau] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\tau_n]$$

   Comme $\mathbb{E}[Y_{\tau_n}] = \mathbb{E}[\tau_n]$ pour tout $n \geq 3$, on peut conclure que

$$\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[\tau].$$

Enfin, presque sûrement, on a

$$Y_\tau = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p},$$

d'où le résultat.

5. Généraliser le résultat au temps moyen d'attente de la première apparition d'une suite de 1 consécutifs de longueur r.

   Soit T le temps de première apparition d'une suite de 1 consécutifs de longueur r. Comme plus haut, on montre que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement. Pour $n \geq r$, on considère alors la suite

$$Y_n := \frac{1}{p^r} \sum_{k=r}^{n} \mathbb{1}_{X_{k-r+1}=\ldots=X_k=1} + \frac{1}{p^{r-1}} \mathbb{1}_{X_{n-r+2}=\ldots=X_n=1} + \ldots + \frac{1}{p} \mathbb{1}_{X_n=1}.$$

   On vérifie que $(Y_n - n)_{n \geq r}$ est une martingale pour la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n \geq r}$. Comme plus haut, le théorème d'arrêt permet alors de conclure que

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[Y_T] = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{p^\ell}.$$

Exercice 5. *Formes quadratiques et martingales*
Soient $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille infinie de nombres réels, à laquelle on pourra penser comme une “matrice infinie”. On considère alors la suite

$$Q_n := \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} X_i X_j,$$

ainsi que la trace $A_n := \sum_{i=0}^n a_{i,i}$. On va montrer le résultat suivant :

Théorème (Varberg, 1966)**.** *On suppose que les variables (X_i) sont centrées réduites et admettent un moment d'ordre 4, i.e.*

$$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \mathbb{E}[X_1^2] = 1, \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[X_1^4] < +\infty.$$

Si $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{i,j}^2 < \infty$, alors la limite $\lim_{n\to+\infty}(Q_n - A_n)$ existe et elle est finie presque sûrement.

Il s'agit ici d'utiliser la méthode des martingales.

1. Sans perdre en généralité, on peut supposer la matrice $(a_{i,j})$ symétrique i.e. $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. Pourquoi ?

   Comme les X_i sont i.i.d, la transformée de Fourier (donc la loi) de Q_n ne dépend que de $a_{i,j} + a_{j,i}$.

$$\mathbb{E}[e^{itQ_n}] = \mathbb{E}[e^{it\sum_{i,j=0}^n a_{i,j}X_iX_j}] = \mathbb{E}[e^{it\sum_{i=0}^n a_{i,i}X_i^2 + it\sum_{i<j=0}^n (a_{i,j}+a_{j,i})X_iX_j}]$$

2. Montrer que la suite $(Q_n - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

   La suite $(Q_n - A_n)_{n\geq 0}$ est bien entendu adaptée par rapport à sa filtration naturelle. Elle est intégrable car

$$\mathbb{E}[|Q_n - A_n|] \leq \mathbb{E}[|Q_n|] + A_n \leq (n+1)^2 \max_{i,j} |a_{i,j}| \times \mathbb{E}[X_1^2] + (n+1) \times \max_{i,j} |a_{i,j}| < +\infty.$$

3. On décompose $Q_n - A_n$ de la façon suivante : $Q_n - A_n = 2U_n + V_n$ où

$$U_n := \sum_{0 \leq i < j \leq n}^{n} a_{i,j} X_i X_j, \quad V_n := \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}[X_i^2 - 1].$$

Montrer que les suites U_n et V_n sont bornées dans $\mathbb{L}^2$, c'est-à-dire :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[U_n^2] < +\infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[V_n^2] < +\infty.$$

On écrit $U_n^2 = \sum_{i<j,k<l}^{n} a_{i,j} a_{k,l} X_i X_j X_k X_l$ de sorte que

$$\mathbb{E}[U_n^2] \;\; = \sum_{i<j,k<l}^{n} a_{i,j} a_{k,l} \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \sum_{i<j}^{n} a_{i,j}^2 \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}^2.$$

De la même façon, on a

$$\mathbb{E}[V_n^2] \;\; = \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,i} a_{j,j} \mathbb{E}[(X_i^2 - 1)(X_j^2 - 1)] = \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}^2.$$

4. En déduire que $(Q_n - A_n)_{n \geq 0}$ est elle-même bornée dans $\mathbb{L}^2$ et conclure.
On a naturellement

$$\mathbb{E}[|Q_n - A_n|] \leq 2\mathbb{E}[|U_n|] + \mathbb{E}[|V_n|]$$

de sorte que, d'après la question précédente, la martingale $(Q_n - A_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2$ et converge donc presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$.