Université de Franche Comté — Master mathématiques et applications
Probabilités et modélisation — année 2018-2019

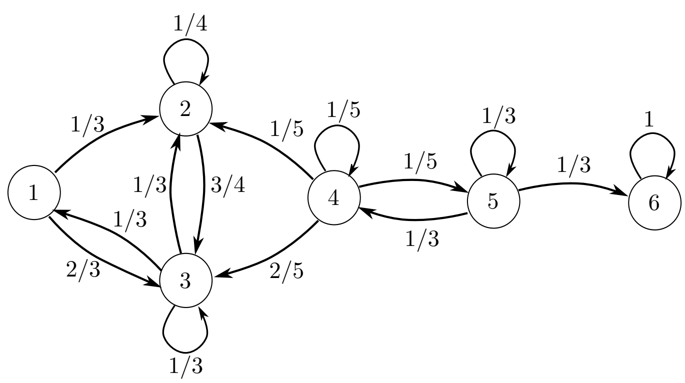
Contrôle continu # 2

Durée 1h20, documents non autorisés

Exercice 1 *Classification et probabilités d'absorption*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe associé à la chaîne.
   Le graphe associé est représenté ci-dessous.



2. Établir la classification des états de la chaîne, i.e. déterminer quels sont les états absorbants, transitoires, récurrents, et les classes de récurrence.
   L'état 6 est absorbant. Comme les états 4 et 5 mènent tous deux à 6, ils sont transitoires. En effet, on a par exemple $\mathbb{P}_5(T_5 = +\infty) \geq \mathbb{P}_5(X_1 = 6) = 1/3 > 0$ c'est-à-dire $\mathbb{P}_5(T_5 < +\infty) \leq 2/3 < 1$. Par ailleurs, les états 1, 2 et 3 communiquent entre eux puisque $\mathbb{P}_1(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1) = Q(1,2)Q(2,3)Q(3,1) = 1/6 > 0$. Pour montrer que $\{1, 2, 3\}$ constitue une classe de récurrence, il reste à voir que l'un de ces

états est récurrent. Considérons par exemple l'état 3 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_3(T_3 = +\infty) &= \mathbb{P}_3(X_n = 2, \forall n \geq 1) + \mathbb{P}_3(X_1 = 1, X_n = 2, \forall n \geq 2) \\
&\leq \mathbb{P}_3(X_n = 2, 1 \leq n \leq N) + \mathbb{P}_3(X_1 = 1, X_n = 2, 2 \leq n \leq N) \\
&= Q(3,2)Q(2,2)^{N-1} + Q(3,1)Q(1,2)Q(2,2)^{N-2} \\
&= \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^{N-1} + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{3} \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^{N-2} \xrightarrow{N \to +\infty} 0.
\end{aligned}$$

L'état 3 est bien récurrent, on a donc la partition :

$$E = E_T \sqcup E_{R_1} \sqcup E_{R_2}, \quad \text{avec} \quad E_T = \{4,5\}, \quad E_{R_1} = \{6\}, \quad E_{R_2} = \{1,2,3\}.$$

3. Déterminer la ou les mesures de probabilité invariante(s) de la chaîne.
   On a vu en TD que les mesures invariantes ne chargent pas les états transitoires, elles sont donc de la forme

$$\alpha(\mu_1, \mu_2, \mu_3, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

   où α et β sont deux réels positifs (non tous nuls) et où $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ est une mesure invariante de la sous-chaîne induite sur E_{R_2}. La relation d'invariance s'écrit :

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \mu_1 &= \dfrac{\mu_3}{3}, \\[2ex] \mu_2 &= \dfrac{\mu_1}{3} + \dfrac{\mu_2}{4} + \dfrac{\mu_3}{3}, \\[2ex] \mu_3 &= \dfrac{2\mu_1}{3} + \dfrac{3\mu_2}{4} + \dfrac{\mu_3}{3}, \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mu_3 &= 3\mu_1, \\[2ex] \mu_2 &= \dfrac{16}{9}\mu_1. \end{cases}$$

   Autrement dit, les mesures invariantes de la chaîne sont de la forme

$$\alpha(1, 16/9, 3, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

   où α et β sont deux réels positifs (non tous nuls). On rajoute la contrainte que la somme des poids vaut 1 si on se restreint aux mesures de proba.

Exercice 2 *Maximum d'une marche aléatoire simple et marche réfléchie*

Soit S_n une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$ i.e. $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$ où les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pm 1, 1/2)$. On note $M_n = \max\{S_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ le maximum de la trajectoire jusqu'au temps n et $Y_n = M_n - S_n$ la différence entre ce maximum et la position courante.

1. Faire un dessin d'une trajectoire de $(S_n)_{0 \leq n \leq 9}$ et des trajectoires de $(M_n)_{0 \leq n \leq 9}$ et $(Y_n)_{0 \leq n \leq 9}$ correspondantes.
2. Étant donné M_n, quelles sont les valeurs possibles pour M_{n+1} ? De même, étant donné Y_n, quelles sont les valeurs possibles pour Y_{n+1} ?
   Étant donné M_n, M_{n+1} le maximum au temps $n+1$ vaut soit $M_n + 1$ si on a $S_n = M_n$ et $X_{n+1} = 1$, autrement dit si $Y_n = 0$ et $X_{n+1} = 1$; soit il vaut $M_{n+1} = M_n$. Dans le premier cas, on a alors $Y_{n+1} = M_{n+1} - S_{n+1} = M_n + 1 - (S_n + 1) = M_n - S_n = Y_n = 0$. Dans le second cas, on a $Y_{n+1} = M_{n+1} - S_{n+1} = M_n - (S_n + X_{n+1}) = Y_n - X_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. Cette chaîne est appelée marche aléatoire réfléchie en zéro.
   D'après ci-dessus, on peut écrire
   $$Y_{n+1} = (Y_n - X_{n+1}) \mathbb{1}_{Y_n > 0 \text{ ou } X_{n+1} = -1}.$$
   Si l'on désigne par $f : \mathbb{N} \times \{-1, 1\} \to \mathbb{N}$ la fonction mesurable
   $$f(y, x) := (y - x) \mathbb{1}_{y > 0 \text{ ou } x = -1},$$
   on a $Y_{n+1} = f(Y_n, X_{n+1})$ où la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est i.i.d. indépendante de $Y_0 = 0$ et d'après le cours $(Y_n)_{n \geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. En découpant suivant la valeur de X_{n+1}, on peut réécrire la relation de récurrence ci-dessus comme
   $$\begin{aligned} Y_{n+1} = &\ (Y_n - X_{n+1}) \mathbb{1}_{Y_n > 0 \text{ ou } X_{n+1} = -1} \times \mathbb{1}_{X_{n+1} = -1} \\ &+ (Y_n - X_{n+1}) \mathbb{1}_{Y_n > 0 \text{ ou } X_{n+1} = -1} \times \mathbb{1}_{X_{n+1} = 1} \\ = &\ (Y_n + 1) \mathbb{1}_{X_{n+1} = -1} + (Y_n - 1) \mathbb{1}_{Y_n > 0} \times \mathbb{1}_{X_{n+1} = 1}. \end{aligned}$$
   Plus simple encore, on peut écrire
   $$Y_{n+1} = \max\{Y_n - X_{n+1}, 0\}.$$
4. Calculer $\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et en déduire que $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$.
   On a $|Y_n| \leq |M_n| + |S_n| \leq 2n$ donc les variables Y_n sont intégrables. Les variables Y_n sont clairement $\mathcal{F}_n$−mesurables. On remarque que comme $Y_n \geq 0$, on peut toujours écrire $Y_n = Y_n \mathbb{1}_{Y_n > 0}$. Par ailleurs, d'après la question précédente, comme Y_n est $\mathcal{F}_n$−mesurable et X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \tfrac{1}{2}(Y_n + 1) + \tfrac{1}{2}(Y_n - 1) \mathbb{1}_{Y_n > 0} \\ &= Y_n + \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathbb{1}_{Y_n > 0}\right) = Y_n + \tfrac{1}{2} \mathbb{1}_{Y_n = 0} \geq Y_n. \end{aligned}$$

5. Justifiez le fait que (Y_n) est aussi une sous-martingale par rapport à sa filtration propre $\mathcal{G}_n := \sigma(Y_1, \dots Y_n)$ et que l'on a en fait $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n]$.
   Le premier point est un résultat du cours. Prosaïquement, on a par inclusion des tribus
   $$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[Y_n + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{Y_n=0}|\mathcal{G}_n] = Y_n + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{Y_n=0} \geq Y_n.$$
   Le fait que $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n]$ est la conséquence du calcul ci-dessus et de la propriété de Markov.
6. Question bonus : explicitez la décomposition de Doob-Meyer de (Y_n).
   D'après la question 3, on a
   $$\begin{aligned} Y_{n+1} - Y_n &= \mathbb{1}_{X_{n+1}=-1} - \mathbb{1}_{Y_n>0} \times \mathbb{1}_{X_{n+1}=1}, \\ &= 1 \text{ si } X_{n+1} = -1, \text{ et } -\mathbb{1}_{Y_n>0} \text{ si } X_{n+1} = 1 \end{aligned}$$
   dont on déduit
   $$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{1}_{Y_n>0} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{Y_n=0}.$$
   Si A_n désigne le compensateur de la sous-martingale (Y_n), on a donc
   $$A_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{Y_k=0}.$$
   Autrement dit, à scalaire près, A_n compte le nombre de passages en zéro de la suite (Y_n). En dehors de zéro, le comportement de (Y_n) est celui d'une marche aléatoire simple, i.e. en dehors de zéro, elle a le comportement d'une martingale.