Éléments de correction du contrôle continu # 1

Exercice 1 *Espérance conditionnelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

1. On fixe deux entiers $m, n \geq 1$ et on considère deux variables aléatoires indépendantes U et V de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, avec $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbb{E}[U|U+V]$.
   On peut réaliser les variables U et V comme des sommes de Bernoulli indépendantes, précisément, le vecteur (U,V) a la même loi que $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i)$ où les X_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. On a alors par symétrie
   $$\mathbb{E}[U|U+V] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i | \sum_{i=1}^{n+m} X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i | \sum_{i=1}^{n+m} X_i\right] = \frac{n}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m} X_i = \frac{n}{n+m}(U+V).$$

2. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que l'on dispose de deux variables aléatoires X et Y de carré intégrable telles que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = X$ et $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X^2]$. Montrer que $\mathbb{E}[Y-X|\mathcal{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[(Y-X)^2|\mathcal{G}] = 0$. En déduire que $X = Y$ presque sûrement.
   Par définition de l'espérance conditionnelle, si $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = X$, la variable X est $\mathcal{G}-$mesurable. Ainsi, on a
   $$\mathbb{E}[Y-X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X - X = 0.$$
   En développant le carré, X étant $\mathcal{G}-$mesurable, on a par ailleurs
   $$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}[(Y-X)^2|\mathcal{G}] &= \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - 2\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - 2X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] + X^2 - 2X^2 = \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] - X^2.\end{aligned}$$
   En prenant l'espérance, comme par hypothèse on a l'égalité $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X^2]$, on obtient que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y-X)^2|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[(Y-X)^2] = 0$ et donc $\mathbb{E}[(Y-X)^2|\mathcal{G}] = 0$ presque sûrement, et $X = Y$ presque sûrement.

Exercice 2 *Espérance conditionnelle gaussienne*

Soit (X,Y,Z) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance
$$\Gamma_{(X,Y,Z)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{X,(Y,Z)} \\ \Gamma_{X,(Y,Z)}^t & \Gamma_{(Y,Z)} \end{pmatrix},$$
où l'on a posé $\Gamma_X := 2$, $\Gamma_{X,(Y,Z)} := (-1,1)$ et $\Gamma_{(Y,Z)} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait qu'il existe deux réels α et β tels que $\mathbb{E}[X|Y,Z] = \alpha Y + \beta Z$.
   Dans le cas de variables de carré intégrable, l'espérance conditionnelle est la projection orthogonale sur $\sigma(Y,Z)$. Pour des variables gaussiennes centrées, cette tribu engendrée se confond avec $\mathrm{vect}(Y,Z)$, d'où le résultat.

2. On rappelle que de façon générale $\mathbb{E}[X|Y,Z] = \mathbb{E}[X] + \Gamma_{X,(Y,Z)}\Gamma_{(Y,Z)}^{-1}\begin{pmatrix} X - \mathbb{E}[X] \\ Y - \mathbb{E}[Y] \end{pmatrix}$.
   Expliciter le calcul et en déduire les valeurs de α et β. On trouve -1 et 1.

3. On se propose maintenant de retrouver les valeurs de α et β "à la main".
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[XY|Y,Z] = \alpha Y^2 + \beta YZ$ et $\mathbb{E}[XZ|Y,Z] = \alpha YZ + \beta Z^2$.
   Si $\mathbb{E}[X|Y,Z] = \alpha Y + \beta Z$, on a en multipliant par Y qui est $\sigma(Y,Z)$ mesurable, on obtient $\mathbb{E}[XY|Y,Z] = \alpha Y^2 + \beta YZ$. De même en multipliant par Z.
   (b) En déduire que les expressions de $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathbb{E}[XZ]$ en fonction de α et β et conclure.
   En prenant l'espérance dans les deux relations ci-dessus, on obtient les deux nouvelles équations $\mathbb{E}[XY] = \alpha\mathbb{E}[Y^2] + \beta\mathbb{E}[YZ]$ et $\mathbb{E}[XZ] = \alpha\mathbb{E}[YZ] + \beta\mathbb{E}[Z^2]$. Reste à résoudre le système...

Exercice 3 *Autour d'un théorème de Kakutani*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et positives et telles que $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout $n \geq 1$. On définit alors $a_n := \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] \in [0,1]$ pour $n \geq 1$ et

$$M_0 := 1, \quad N_0 := 1, \quad M_n := \prod_{k=1}^n X_k, \quad N_n := \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{X_k}}{a_k}.$$

1. Montrer que les suites $(M_n)_{n\geq 1}$ et $(N_n)_{n\geq 1}$ convergent presque sûrement.
   Il s'agit de montrer que les suites sont des martingales. On travaille avec la filtration naturelle $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Les variables étant positives, par indépendance, on a pour $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 1, \qquad \mathbb{E}[|N_n|] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\sqrt{X_i}/a_i] = 1.$$

   Enfin, on a
$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n\mathbb{E}[X_{n+1}] = M_n,$$
$$\mathbb{E}[N_{n+1}|\mathcal{F}_n] = N_n\mathbb{E}[\sqrt{X_{n+1}}/a_{n+1}|\mathcal{F}_n] = N_n\mathbb{E}[\sqrt{X_{n+1}}/a_{n+1}] = N_n.$$

   Les suites, (M_n) et (N_n) étant des martingales positives, d'après le cours, elles convergent presque sûrement, vers des limites notées M_∞ et N_∞.

2. On suppose que $\prod_{k=1}^\infty a_k > 0$.
   (a) Montrer que la suite $(N_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^2$.
   On a alors
$$\sup_{n\geq 0} [N_n^2] = \left(\prod_{k=1}^\infty a_k\right)^{-2} < +\infty.$$
   La martingale (N_n) est ainsi bornée dans $\mathbb{L}^2$ et d'après le cours, elle converge dans $\mathbb{L}^2$.

   (b) En déduire que $(M_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.
   Si (N_n) converge dans $\mathbb{L}^2$ alors (M_n) converge dans $\mathbb{L}^1$ et d'après le cours, elle est donc uniformément intégrable.

3. On suppose maintenant $\prod_{k=1}^\infty a_k = 0$.
   (a) Montrer qu'alors $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers zéro.
   Si le produit infini vaut zéro, comme la suite (N_n) converge p.s. on a nécéssairement $\prod_{k\geq 1}\sqrt{X_k} = 0$ presque sûrement et par suite $M_\infty = 0$ presque sûrement.
   (b) En déduire que $(M_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément intégrable.
   Si la suite était uniformément intégrable, on aurait $0 = \mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = 1$.

Exercice 4 *Transformées de martingales*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1=-1)=1/2$ et $\mathbb{P}(X_1=1)=1/2$. On pose $S_0:=0$ et $S_n:=X_1+\ldots+X_n$ pour $n\geq 1$.

1. Donner la décomposition de Doob de la suite $S_n^2=M_n+A_n$ où M_n est une martingale issue de zéro et A_n est un suite croissante prévisible.
   On a par définition de la suite A_n
   $$A_n-A_{n-1}=\mathbb{E}[S_n^2-S_{n-1}^2|\mathcal{F}_{n-1}]=\mathbb{E}[(S_n-S_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}]=1,$$
   donc $A_n=n$ et $M_n=S_n^n-n$ est une martingale.
2. Expliciter une constante $c>0$ telle que la suite $N_n:=\exp(S_n-cn)$ soit une martingale.
   On a $|S_n|\leq n$ donc N_n est intégrable. Par ailleurs, si on travaille avec la filtration naturelle associée aux X_i, on a
   $$\mathbb{E}[N_{n+1}|\mathcal{F}_n]=N_n\times e^{-c}\times\mathbb{E}\left[e^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right]=N_n\times e^{-c}\times\mathbb{E}\left[e^{X_1}\right].$$
   Ainsi, N_n est une martingale ssi $c=\log(\mathbb{E}\left[e^{X_1}\right])$
3. Montrer que la suite $(N_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et préciser sa limite.
   D'après la loi des grands nombres, S_n/n tend vers zéro presque sûrement, et comme $c>0$, la suite $N_n=\exp(-n(c-S_n/n))$ tend presque sûrement vers zéro.
4. La suite $(N_n)_{n\geq 0}$ est-elle uniformément intégrable ?
   Non, comme dans la fin de l'exercice précédent, si N_n était uniformément intégrable, on aurait $0=\mathbb{E}[N_\infty]=\mathbb{E}[N_0]=1$.

Exercice 5 *Lieu et temps de sortie d'une marche aléatoire asymétrique*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que
$$\mathbb{P}(X_1=-1)=q=1-p,\quad \mathbb{P}(X_1=1)=p,\quad \text{avec}\quad p\neq 1/2.$$
On pose $S_0:=0$ et $S_n:=X_1+\ldots+X_n$ pour $n\geq 1$ et on désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On introduit le temps de sortie $T=\inf\{n\geq 0,\ S_n\notin]-a,b[\}$ de la bande $[-a,b]$. L'objet de l'exercice est de déterminer la loi du point de sortie S_T et le temps moyen de sortie.

1. Montrer que les suites $W_n:=S_n-(2p-1)n$ et $M_n=(q/p)^{S_n}$ issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
   Pas de difficulté, pour l'intégrabilité, il suffit de se rappeler que $|S_n|\leq n$.
2. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement (indice : LGN).
   On peut écrire
   $$\{T\leq n\}=\bigcup_{k\leq n}\underbrace{\{S_k\notin]-a,b[\}}_{\in\mathcal{F}_k}\in\mathcal{F}_n.$$
   D'après la loi des grands nombres, on a $S_n/n\to 2p-1\neq 0$ presque sûrement. Ainsi,
   $$\mathbb{P}(T=+\infty)=\mathbb{P}(\forall n\geq 1,\ S_n\in]-a,b[)\leq\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}|S_n|/n=0)=0.$$
   .
3. Montrer que les martingales arrêtées $(W_{T\wedge n})$ et $(M_{T\wedge n})$ sont uniformément intégrables.
   Les martingales arrêtées sont des martingales et avant le temps T, la suite $S_{n\wedge T}$ est bornée par $|a|\vee b$. Ainsi les suites $(W_{T\wedge n})$ et $(M_{T\wedge n})$ sont bornées déterministiquement et sont donc uniformément intégrables.

4. En appliquant le théorème d'arrêt à $(M_{T\wedge n})$, déterminer $\mathbb{P}(S_T = -a)$ et $\mathbb{P}(S_T = b)$.
   D'après le théorème d'arrêt,
   $$\mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_0] = 1.$$
   Comme T est fini p.s., on a $M_{T\wedge n} \to M_T$ p.s. lorsque n tend vers l'infini, et par convergence dominée (la suite est U.I.), on conclut que
   $$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] = 1.$$
   Autrement dit
   $$(q/p)^{-a}\mathbb{P}(S_T = -a) + (q/p)^b\mathbb{P}(S_T = b) = 1.$$
   Comme
   $$\mathbb{P}(S_T = -a) + \mathbb{P}(S_T = b) = 1,$$
   on déduit les valeurs de $\mathbb{P}(S_T = -a)$ et $\mathbb{P}(S_T = b)$ en résolvant le système 2×2.
5. En appliquant le théorème d'arrêt à $(W_{T\wedge n})$, déduire le temps moyen de sortie $\mathbb{E}(T)$.
   Comme indiqué, on applique théorème d'arrêt pour obtenir
   $$\mathbb{E}[W_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[W_0] = 0.$$
   Comme plus haut, par convergence dominée on obtient alors
   $$\mathbb{E}[W_T] = 0, \quad \text{soit} \quad \mathbb{E}[S_T] = (2p-1)\mathbb{E}[T]$$
   et l'on conclut grâce à la question précédente puisque l'on connaît la loi de du lieu de sortie S_T. La dernière égalité est connue sous le nom d'identité de Wald.