Contrôle continu # 2

Durée 1h20, documents non autorisés.

Exercice 1 *Classification et mesure(s) invariante(s)*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe associé à la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Établir la classification des états de la chaîne, i.e. déterminer quels sont les états absorbants, transitoires, récurrents, et les classes de récurrence.
3. Déterminer la ou les mesures de probabilité invariante(s) de la chaîne.

Exercice 2 *Maximum d'une marche aléatoire simple et marche réfléchie*
Soit S_n une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$ i.e. $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$ où les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pm 1, 1/2)$. On note $M_n = \max\{S_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ le maximum de la trajectoire jusqu'au temps n et $Y_n = M_n - S_n$ la différence entre ce maximum et la position courante.

1. Faire un dessin d'une trajectoire de $(S_n)_{0\leq n\leq 9}$ et des trajectoires de $(M_n)_{0\leq n\leq 9}$ et $(Y_n)_{0\leq n\leq 9}$ correspondantes.
2. Étant donné M_n, quelles sont les valeurs possibles pour M_{n+1} ? De même, étant donné Y_n, quelles sont les valeurs possibles pour Y_{n+1} ?
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Cette chaîne est appelée marche aléatoire réfléchie en zéro.
4. Calculer $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et en déduire que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$.
5. Justifiez le fait que (Y_n) est aussi une sous-martingale par rapport à sa filtration propre $\mathcal{G}_n := \sigma(Y_1, \ldots Y_n)$ et que l'on a en fait $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n]$.
6. Question bonus : explicitez la décomposition de Doob–Meyer de (Y_n).