Contrôle continu # 1

Durée 2h30, documents autorisés

Exercice 1 *Espérance conditionnelle*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

1. On fixe deux entiers $m, n \geq 1$ et on considère deux variables aléatoires indépendantes U et V de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, avec $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbb{E}[U|U+V]$.
2. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que l'on dispose de deux variables aléatoires X et Y de carré intégrable telles que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = X$ et $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X^2]$. Montrer que $\mathbb{E}[Y - X|\mathcal{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[(Y-X)^2|\mathcal{G}] = 0$. En déduire que $X = Y$ presque sûrement.

Exercice 2 *Espérance conditionnelle gaussienne*
Soit (X,Y,Z) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma_{(X,Y,Z)} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{X,(Y,Z)} \\ \Gamma^t_{X,(Y,Z)} & \Gamma_{(Y,Z)} \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $\Gamma_X := 2$, $\Gamma_{X,(Y,Z)} := (-1,1)$ et $\Gamma_{(Y,Z)} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait qu'il existe deux réels α et β tels que $\mathbb{E}[X|Y,Z] = \alpha Y + \beta Z$.
2. On rappelle que de façon générale $\mathbb{E}[X|Y,Z] = \mathbb{E}[X] + \Gamma_{X,(Y,Z)}\Gamma^{-1}_{(Y,Z)} \begin{pmatrix} X - \mathbb{E}[X] \\ Y - \mathbb{E}[Y] \end{pmatrix}$.

   Expliciter le calcul et en déduire les valeurs de α et β.
3. On se propose maintenant de retrouver les valeurs de α et β “à la main".
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[XY|Y,Z] = \alpha Y^2 + \beta YZ$ et $\mathbb{E}[XZ|Y,Z] = \alpha YZ + \beta Z^2$.
   (b) En déduire que les expressions de $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathbb{E}[XZ]$ en fonction de α et β et conclure.

Exercice 3 *Autour d'un théorème de Kakutani*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et positives et telles que $\mathbb{E}[X_1] = 1$ pour tout $n \geq 1$. On définit alors $a_n := \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] \in [0,1]$ pour $n \geq 1$ et

$$M_0 := 1, \quad N_0 := 1, \quad M_n := \prod_{k=1}^n X_k, \quad N_n := \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{X_k}}{a_k}.$$

1. Montrer que les suites $(M_n)_{n\geq 1}$ et $(N_n)_{n\geq 1}$ convergent presque sûrement.
2. On suppose que $\prod_{k=1}^\infty a_k > 0$.
   (a) Montrer que la suite $(N_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^2$.
   (b) En déduire que $(M_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.
3. On suppose maintenant $\prod_{k=1}^\infty a_k = 0$.
   (a) Montrer qu'alors $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers zéro.
   (b) En déduire que $(M_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément intégrable.

Exercice 4 *Transformées de martingales*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Donner la décomposition de Doob de la suite $S_n^2 = M_n + A_n$ où M_n est une martingale issue de zéro et A_n est un suite croissante prévisible.
2. Expliciter une constante $c > 0$ telle que la suite $N_n := \exp(S_n - cn)$ soit une martingale.
3. Montrer que la suite $(N_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et préciser sa limite.
4. La suite $(N_n)_{n\geq 0}$ est-elle uniformément intégrable ?

Exercice 5 *Lieu et temps de sortie d'une marche aléatoire asymétrique*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \quad \text{avec} \quad p \neq 1/2.$$

On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$ et on désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On introduit le temps de sortie $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin]-a, b[\}$ de la bande $[-a, b]$. L'objet de l'exercice est de déterminer la loi du point de sortie S_T et le temps moyen de sortie.

1. Montrer que les suites $W_n := S_n - (2p-1)n$ et $M_n = (q/p)^{S_n}$ issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement (indice : LGN).
3. Montrer que les martingales arrêtées $(W_{T\wedge n})$ et $(M_{T\wedge n})$ sont uniformément intégrables.
4. En appliquant le théorème d'arrêt à $(M_{T\wedge n})$, déterminer $\mathbb{P}(S_T = -a)$ et $\mathbb{P}(S_T = b)$.
5. En appliquant le théorème d'arrêt à $(W_{T\wedge n})$, déduire le temps moyen de sortie $\mathbb{E}(T)$.