Feuille d'exercices # 5

Quelques rappels : soient X et $(X_n)_{n\geq n}$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que

— (X_n) tend presque sûrement vers X si et seulement si

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n = X) = 1.$$

— (X_n) converge en loi vers X si et seulement si, pour tout point* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Les deux résultats fondamentaux concernant les sommes de variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) sont la loi des grands nombres et le théorème limite central.

Théorème (Loi des grands nombres)**.** *Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$. Si on pose $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, alors la suite S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X_1]$ lorsque n tend vers l'infini.*

Théorème (Théorème limite central)**.** *Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\sigma^2 := var(X_1) < +\infty$. Lorsque n tend vers l'infini, la suite $\sqrt{n}(S_n/n - \mathbb{E}[X_1])$ converge en loi vers une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.*

Exercice 1. *Loi d'un minimum/maximum*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de fonction de répartion commune notée $F_X(x) := \mathbb{P}(X_1 \leq x)$. On pose $m_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. Déterminer la fonction de répartition de m_n et M_n.
2. Dans le cas où les X_i sont des variables uniforme dans $[0, 1]$, en déduire que m_n tend presque sûrement vers 0 et M_n tend presque sûrement vers 1.
3. Montrer que la suite $Z_n = n(1 - M_n)$ converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1.

Exercice 2. *Méthode de Monte-Carlo*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$ et soit f une fonction (mesurable) bornée de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $Y_i = f(X_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

1. Que peut-on dire des variables Y_i (indépendence, loi) ?
2. Déterminer $\mathbb{E}[Y_1]$.
3. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} = \int_0^1 f(x)dx.$$

Cette méthode d'approximation d'intégrale, appelée méthode de Monte-Carlo, est très fréquemment utilisée en pratique, en particulier lorsque la fonction f est irrégulière ou en grande dimension.

Exercice 3. *Autour de la convergence presque sûre*
On jette n fois de suite un dé usuel numéroté de 1 à 6, on note X_k le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer et Y_n le maximum des résultats : $Y_n = \max_{1 \le k \le n} X_k$.

1. Montrer que la suite Y_n converge presque sûrement vers 6 lorsque n tend vers l'infini.
2. On note $N_n = \#\{k \in \{1, \ldots, n\},\, X_k = 6\}$. Montrer que N_n/n tend presque sûrement vers la valeur $1/6$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4. *Lancer de dé, LGN et TLC*
On jette n fois de suite un dé usuel numéroté de 1 à 6, on note X_k le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer et on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Calculer la moyenne et la variance de X_1.

b) Quelle est la limite de S_n/n lorsque n tend vers l'infini ?

c) Quelle est la loi limite de $\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{7}{2}\sqrt{n}$ lorsque n tend vers l'infini ?

d) On admet que si Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{P}(|Z| > 1,96) = 5\%$. En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(S_{1000} \in I) = 95\%$.

Exercice 5. *Calculs de limites via LGN et TLC*
Soit f une fontion réelle continue bornée. En interprétant les intégrales / sommes ci-dessous comme des espérances, déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n,$

b) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$

c) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$

Exercice 6. *Somme de variables de Poisson et TLC*
On rappelle ici que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ_i pour $1 \le i \le n$, alors $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

a) Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables de Poisson indépendantes de paramètre commun $\lambda_i = 1$, alors

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \le n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

b) À l'aide théorème limite central, en déduire que $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. *Approximation normale*
On jette 180 fois de suite un dé usuel numéroté de 1 à 6. On note X la variable aléatoire : "nombre de sorties du chiffre 4 sur les 180 lancers".

1. Quelle est la loi de X ?
2. Estimer la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Exercice 8. *Passage à niveau*
On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau peu fréquenté suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculer une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.