Université de Franche Comté | L2 Informatique
Probabilités élémentaires | année 2017-2018

Feuille d'exercices # 2

Exercice 1 *Calculs élémentaires*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilités où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la tribu $\mathcal{F}$ est la tribu des parties $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ est la mesure uniforme i.e. pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \#A/\#\Omega$. On considère les événements $A = \{\omega \in \Omega, 2 \leq \omega \leq 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$ et $C = \{1, 5\}$.

1. Calculer les probabilités suivantes $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup C)$, $\mathbb{P}(A^c)$.
2. Calculer de deux façons la probabilité $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 2 *Exemples d'espaces de probabilités*
Exhiber les espaces de probabiltés $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associés aux expériences aléatoires suivantes :

1. On lance deux fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de `pile` apparus.
2. On choisit une pièce au hasard dans un porte-monnaie qui contient deux pièces de deux euros, trois pièces de un euros, cinq pièces de 10 cents.
3. On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 100.

Exercice 3 *Anniversaire*
Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous 10 euros que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari ?

Exercice 4 *QCM et hasard*
Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Exercice 5 *Pyramide truquée*
On lance un dé tétraédrique non équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note p_i la probabilité d'obtenir la face portant le nombre i. On fait l'hypothèse que les réels p_i vérifient les relations suivantes : $p_1 = p_2$, $p_3 = 2p_1$ et $p_4 = p_3$.

1. Déterminer la valeur des nombres p_i pour tout entier $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $A := \{1, 3\}$.

Exercice 6 *Pile ou face*
On lance 3 pièces de monnaie équilibrées. Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience. Calculer les probabilités des évènements suivants : “la première pièce donne face”, “face sort exactement deux fois” , “face sort au plus deux fois”.

Exercice 7 *Histoire de dés*
On lance 10 dés usuels. Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience. Calculer les probabilités des évènements suivants : “6 ne sort pas”, “6 sort une fois exactement”, “6 sort trois fois exactement”,“6 sort deux fois au moins”, “6 sort trois fois au moins”.

Exercice 8 *Probabilités au poker*
On considère une main de poker, i.e. la donnée de 5 cartes parmi 52.

1. Donner un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser le choix d'une main au hasard.
2. Est-il plus probable d'obtenir un full i.e. $3+2$ cartes de mêmes hauteurs, ou une couleur i.e. 5 cartes de la même couleur ?
3. Est-il plus probable d'obtenir une couleur ou un carré i.e. 4 cartes de la même hauteur ?

Exercice 9 *Dé truqué*
On lance un dé truqué à 6 faces et l'on suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro qu'elle porte.

1. Calculer la probabilité de tomber sur chacune des 6 faces.
2. Quelle est la probabilité de tomber sur un chiffre pair ?

Exercice 10 *Double six*
Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois six en lançant quatre dés usuels, ou bien d'obtenir au moins une fois un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés usuels ?

Exercice 11 *Double six, le retour*
On lance n fois de suite deux dés normaux. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double six ? Pour quels n cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$?

Exercice 12 *Formule du crible pour trois événements*
Montrer que pour trois évènements A, B, C quelconques, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 13 *Union, intersection et probabilité*
Soient A, B et C des évènements. On pose $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.

1. Montrer que les évènements E_1 et E_2 sont incompatibles ;
2. Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$;
3. On sait que $\mathbb{P}(A) = 0,6$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, $\mathbb{P}(C) = 0,3$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 0,1$, $\mathbb{P}(A \cap C) = 0,1$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,05$. Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2)$.