

FEUILLE D'EXERCICES # 1

Exercice 1 *Union, intersection, complémentaire*

On considère une expérience pour laquelle trois évènements A , B et C sont possibles. Exprimer, en fonction de A , B , et C , les évènements suivants :

1. seul A est réalisé ;
2. seul B est réalisé ;
3. seuls A et B sont réalisés ;
4. A et B sont réalisés ;
5. un des trois évènement au moins est réalisé ;
6. deux évènements au moins sont réalisés ;
7. aucun évènement n'est réalisé.

Exercice 2 *Un peu de combinatoire*

1. Combien de nombres à 6 chiffres existe-t-il ? Même question si les nombres doivent être divisibles par 5 ? et si les répétitions sont interdites ?
2. Combien de nombres distincts peut on former avec les chiffres 3, 3, 5, 0 ?
3. Soit E un ensemble à n éléments et $A \subset E$ un sous ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 3 *Cent mille milliards de poèmes*

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé Cent mille milliards de poèmes. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice 4 *Cardinal d'une union, d'une intersection*

Dans une entreprise, il y a 800 employés. Parmi ces employés, 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes non mariées et non syndiquées ?

Exercice 5 *Tournoi sportif*

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice 6 *Compter les chemins*

On part du point du plan de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées entières (p, q) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ? Même question si l'on se déplace à chaque étape du vecteur $(1, 1)$ ou $(1, -1)$?

Exercice 7 *Mains de poker*

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 8 *Anniversaire*

Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous 10 euros que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari ?

Exercice 9 *Autour des coefficients binomiaux*

On rappelle que si n et $p \leq n$ sont deux entiers, le nombre de choix de p éléments parmi n est donné par le coefficient binomial

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1. Montrez que l'on a la relation

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n2^{n-1}.$$

Exercice 10 *Choix successifs*

1. En utilisant la définition des coefficients binomiaux comme "nombre de choix parmi...", montrez que si p, q et n sont des entiers tels que $n \leq p + q$, alors on a la relation

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$

Retrouver ce résultat à l'aide de la formule du binôme en développant de deux façons le produit $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$.

2. Déduire de la question précédente la relation

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$