(*A01-public*)

Résumé : La position du pion dans une partie de jeu de l'oie peut être modélisée par une chaîne de Markov admettant un point absorbant (la case d'arrivée).

En étudiant le temps que met une chaîne de Markov pour atteindre un point absorbant, on décrit dans ce texte la loi de la durée d'une partie, ainsi que la position typique du pion dans une partie longue.

Mots clefs : Chaîne de Markov, loi géométrique, loi invariante.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Le jeu de l'oie est un jeu qui se joue sur un plateau et dans lequel les joueurs déplacent chacun leur tour leur pion d'autant de cases qu'indiqué par le lancer d'un dé. Le but du jeu est d'arriver *exactement* sur la case d'arrivée : si le déplacement est supposé continuer au-delà, le pion du joueur doit faire demi-tour. Ce point fait qu'une partie peut durer très longtemps : une fois que l'on approche de la case d'arrivée, il faut un certain temps pour faire le bon lancer, et la partie semble ne plus évoluer.

Ce jeu peut se modéliser par une chaîne de Markov, et le but de ce texte est d'étudier la durée de la partie. Pour fixer les idées, on va utiliser un plateau de huit cases (numérotées de 1 à 7, plus une case "X"), disposées comme sur la figure 1, et on supposera qu'il n'y a qu'un seul joueur. Le joueur part de la case 1. À chaque tour, il lance un dé équilibré à six faces et avance du nombre de cases correspondant. Si le joueur arrive sur la case 7, il a gagné et la partie s'arrête. Si le lancer du dé fait dépasser la case 7, le joueur revient sur ses pas. Par exemple, depuis la case 6, un lancer de 4 ramène en case 5 : on fait 1 pas pour aller jusqu'à la case 7, puis 3 pas en arrière. Pour corser les choses, on a "piégé" une des cases, notée X : si le joueur finit dessus, il est renvoyé en case 1. En conséquence, à chaque tour on ne peut partir que des cases $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

1	2	3	4	5	X	6	7

FIGURE 1. Le plateau de jeu

On peut donc vérifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des positions successives d'un joueur est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,\dots,7\}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ici, on a supposé qu'une fois la case finale 7 atteinte, le joueur y reste définitivement. La durée T du jeu est le temps d'atteinte du point 7 par la chaîne, défini par

$$T = \inf\{n \geq 0, X_n = 7\}. \tag{2}$$

Le but de ce texte est d'étudier la loi de T, ainsi que la loi de X_n sachant que T est grand (position typique dans une partie longue).

1. Chaînes de Markov presque irréductibles

Dans la suite de ce texte, on ne considérera que des chaînes de Markov vérifiant l'hypothèse suivante, ce qui est le cas de la chaîne présentée en introduction.

Définition 1. *Une chaîne de Markov sur* $\{1,\dots,N\}$ *de matrice de transition* P *est dite* presque irréductible *si* $P_{N,N} = 1$, *si pour tout* $1 \leq i, j < N$, *il existe un entier* n_0 *tel que* $P^{n_0}_{i,j} > 0$ *et si il existe* $1 \leq i < N$ *tel que* $P_{i,N} > 0$.

Ici, la notation $P^n_{i,j}$ *désigne le* (i,j)*-ème coefficient de la matrice* P^n.

Autrement dit, une chaîne de Markov presque irréductible admet N comme point absorbant, et le reste de l'espace d'états est composé d'une seule classe d'irréductibilité.

Remarquons que la matrice de transition d'une chaîne de Markov presque irréductible s'écrit par blocs sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{P} & q \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où $\mathbf{0}$ désigne le vecteur nul de taille $1 \times (N-1)$ et q désigne un vecteur de taille $(N-1)\times 1$. La matrice $\tilde{P}$ est une matrice positive de taille $(N-1)\times(N-1)$.

2. Majoration du temps d'absorption

On appellera *temps d'absorption* T d'une chaîne de Markov presque irréductible $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le temps aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 0, X_n = N\}. \tag{4}$$

Le résultat suivant montre que ce temps ne peut pas être plus long qu'un temps de loi géométrique de paramètre bien choisi.

Théorème 2. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une chaîne de Markov presque irréductible. Il existe des constantes* $C>0$ *et* $0<p<1$ *telles que quelle que soit la loi de* X_0*, on ait*

$$\forall n\geq 0,\ \mathbf{P}(T>n)\leq Cp^n. \tag{5}$$

Démonstration. Par définition d'une chaîne presque irréductible, pour tout $1\leq i<N$, il existe d_i tel que $P^{d_i}_{i,N}>0$. Or, pour $d'\geq d''$, on a $P^{d'}_{i,N}\geq P^{d''}_{i,N}$. Par conséquent, en posant $d=\max_{1\leq i<N} d_i$, on a $P^{d}_{i,N}>0$ pour tout $1\leq i<N$. On pose alors $\alpha=\max_{1\leq i<N}(1-P^{d}_{i,N})<1$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T>(m+1)d)&=\mathbf{P}(T>(m+1)d|T>md)\mathbf{P}(T>md)\\&=\mathbf{P}(X_{(m+1)d}\neq N|X_{md}\neq N)\mathbf{P}(T>md)\\&\leq \alpha\mathbf{P}(T>md).\end{aligned}\tag{6}$$

Par récurrence, il vient $\mathbf{P}(T>md)\leq\alpha^m$. L'inégalité (5) s'en déduit avec $p=\alpha^{1/d}$ et $C=\alpha^{-1}$. □

3. Mesure presque invariante

Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini admet une unique mesure invariante. Il existe un analogue à cette notion dans le cas des chaînes presque irréductibles.

Définition 3. *Soit P une matrice de transition presque irréductible. On dit que la mesure de probabilité μ sur* $\{1,\ldots,N-1\}$ *est* presque invariante *si pour X_0 de loi μ, la loi de X_1 conditionnellement à $\{X_1\neq N\}$ est égale à μ. Autrement dit, μ est presque invariante si on a l'égalité*

$$\forall 1\leq j<N,\ \frac{\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i P_{i,j}}{1-\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i P_{i,N}}=\mu_j. \tag{7}$$

L'équation (7) peut se récrire comme

$$\begin{pmatrix}\mu & 0\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\mu & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde P & q\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mu & 1-\lambda\end{pmatrix}, \tag{8}$$

où $\lambda=1-\sum_{i=1}^{N-1}\mu_i P_{i,N}$ D'après (8), une probabilité μ est une mesure presque invariante si et seulement si μ est vecteur propre à gauche de la matrice $\tilde P$. Ceci permet de montrer l'existence et l'unicité d'une mesure presque invariante grâce au théorème admis suivant :

Théorème 4 (Perron-Frobenius)**.** *La matrice $\tilde P$ admet un vecteur propre à gauche à coefficients positifs ou nuls. Un tel vecteur est unique à multiplication par un scalaire près.*

Corollaire 5. *Il existe une unique mesure de probabilité presque invariante $\tilde\mu$.*

Dans l'exemple du jeu de l'oie, la mesure presque invariante est donnée par (à 10^{-3} près)

$$\tilde\mu=(0.251,0.048,0.109,0.130,0.190,0.272), \tag{9}$$

ce qui est tracé sur la figure 2.

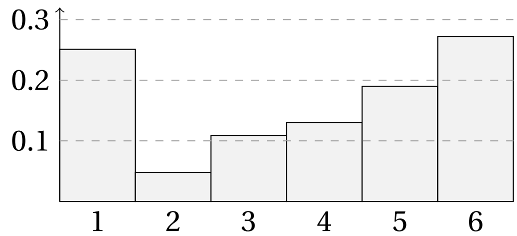

FIGURE 2. La mesure presque invariante du jeu de l'oie.

4. Temps d'absorption à partir de la loi presque invariante

Théorème 6. *Si X_0 est distribuée selon la loi presque invariante $\tilde{\mu}$, alors le temps d'absorption suit la loi géométrique de paramètre $1-\tilde{\lambda}$, où $\tilde{\lambda}$ est la valeur propre de $\tilde{P}$ associée à $\tilde{\mu}$:*

$$\text{pour } k \geq 1, \ \mathbf{P}(T=k) = \tilde{\lambda}^{k-1}(1-\tilde{\lambda}). \tag{10}$$

En particulier, l'espérance de T est $1/(1-\tilde{\lambda})$.

Démonstration. Supposons X_0 distribuée selon la loi presque invariante $\tilde{\mu}$. On a alors la relation $\begin{pmatrix}\tilde{\mu} & 0\end{pmatrix} P = \begin{pmatrix}\tilde{\lambda}\tilde{\mu} & 1-\tilde{\lambda}\end{pmatrix}$. On a donc $\mathbf{P}(X_1 \neq N) = \tilde{\lambda}$, et pour $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(T \geq k+1) = \mathbf{P}(T \geq k+1 | X_1 \neq N)\tilde{\lambda}. \tag{11}$$

Or, par définition de la presque invariance de $\tilde{\mu}$, la loi de X_1 conditionnellement à $\{X_1 \neq N\}$, est égale à la loi de X_0. Par la propriété de Markov on obtient donc, pour $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(T \geq k+1 | X_1 \neq N) = \mathbf{P}(T \geq k). \tag{12}$$

Finalement, $\mathbf{P}(T \geq k+1) = \tilde{\lambda}\mathbf{P}(T \geq k)$, d'où $\mathbf{P}(T \geq k) = \tilde{\lambda}^{k-1}$. □

Dans le cas du jeu de l'oie, la valeur propre $\tilde{\lambda}$ vaut environ 0.875, de sorte que la durée moyenne de la partie, partant de la mesure presque invariante, est de 8.014.

5. Convergence vers la mesure presque invariante

Pour toute loi initiale μ^0 sur $\{1, \ldots, N-1\}$, on définit la mesure

$$\mu_i^n = \mathbf{P}(X_n = i | T > n) = \mathbf{P}(X_n = i | X_n \neq N) \tag{13}$$

qui correspond à la position de la chaîne en supposant qu'elle n'a pas été absorbée.

Théorème 7. *On suppose que les états $\{1, \ldots, N-1\}$ sont apériodiques, autrement dit que la matrice $\tilde{P}$ admet une puissance dont les coefficients sont strictement positifs (c'est le cas de la matrice de l'introduction).*

Pour μ^0 une mesure de probabilité sur $\{1, \ldots, N-1\}$, la suite $(\mu^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge exponentiellement vite vers $\tilde{\mu}$. Plus précisément, il existe des constantes $C > 0$ et $0 < p < 1$ telles que pour *toute mesure* μ^0 *sur* $\{0,\dots,N-1\}$*, on ait*

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\mu_i^n - \tilde{\mu}_i| \le C p^n. \tag{14}$$

Pour la preuve de ce théorème, on considère $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux chaînes de Markov indépendantes de matrice de transition P, telles que X_0 soit distribuée selon μ^0 et Y_0 soit distribuée selon $\tilde{\mu}$. On note $\mathscr{A}_n$ l'évènement $\mathscr{A}_n = \{X_n \neq N, Y_n \neq N\}$. Par définition de μ^n et $\tilde{\mu}$, on remarque que conditionnellement à $\mathscr{A}_n$ les variables X_n et Y_n ont pour lois respectives μ^n et $\tilde{\mu}$.

On définit le *temps de couplage* de $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $S = \inf\{n \ge 0,\ X_n = Y_n\}$. Le théorème 7 est alors une conséquence directe des deux lemmes suivants :

Lemme 8. *On a la majoration, pour tout* $n \ge 0$ *:*

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\mu_i^n - \tilde{\mu}_i| \le 2\mathbf{P}(S > n|\mathscr{A}_n). \tag{15}$$

Lemme 9. *Il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $0 < p < 1$ *telles que pour* $n \ge 0$*, on ait*

$$\max_{1\le i,j<N} \mathbf{P}(S > n|\mathscr{A}_n \cap \{X_0 = i, Y_0 = j\}) \le C p^n.$$

Démonstration du lemme 8. Conditionnellement à $\mathscr{A}_n$, les variables X_n et Y_n ont pour lois respectives μ^n et $\tilde{\mu}$, d'où

$$\begin{aligned} \mu_i^n - \tilde{\mu}_i = {} & \mathbf{P}(X_n = i, S \le n|\mathscr{A}_n) + \mathbf{P}(X_n = i, S > n|\mathscr{A}_n) \\ & - \mathbf{P}(Y_n = i, S \le n|\mathscr{A}_n) - \mathbf{P}(Y_n = i, S > n|\mathscr{A}_n). \end{aligned} \tag{16}$$

Or, on a $\mathbf{P}(X_n = i, S \le n|\mathscr{A}_n) = \mathbf{P}(Y_n = i, S \le n|\mathscr{A}_n)$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\mu_i^n - \tilde{\mu}_i| \le \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}(X_n = i, S > n|\mathscr{A}_n) + \mathbf{P}(Y_n = i, S > n|\mathscr{A}_n) = 2\mathbf{P}(S > n|\mathscr{A}_n). \tag{17}$$

□

Démonstration du lemme 9. Dans cette preuve, on désignera par $\mathbf{P}_{i,j}$ la probabilité conditionnelle par rapport à l'évènement $\{X_0 = i, Y_0 = j\}$. Pour tout entier $d \ge 1$, on a l'expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i_0,j_0}\left(S > (n+1)d \,\middle|\, \mathscr{A}_{(n+1)d}\right) = \sum_{1\le i,j<N} \Big(& \mathbf{P}_{i_0,j_0}\left(S > (n+1)d \,\middle|\, \{S > d, X_d = i, Y_d = j\} \cap \mathscr{A}_{(n+1)d}\right) \\ & \times \mathbf{P}_{i_0,j_0}\left(X_d = i, Y_d = j \,\middle|\, \{S > d\} \cap \mathscr{A}_{(n+1)d}\right) \times \mathbf{P}_{i_0,j_0}\left(S > d \,\middle|\, \mathscr{A}_{(n+1)d}\right)\Big). \end{aligned} \tag{18}$$

Par la propriété de Markov, on peut écrire

$$\mathbf{P}_{i_0,j_0}\left(S > (n+1)d \,\middle|\, \{S > d, X_d = i, Y_d = j\} \cap \mathscr{A}_{(n+1)d}\right) = \mathbf{P}_{i,j}\left(S > nd \,\middle|\, \mathscr{A}_{nd}\right) \tag{19}$$

On admettra que $\mathbf{P}_{i,j}\left(S > d \middle| \mathscr{A}_{nd}\right)$ est majoré par un $\alpha < 1$ indépendamment de n, i et j dès que $\mathbf{P}_{i,j}(S > d)$ l'est. Or, par apériodicité de la chaîne, c'est effectivement le cas pour d assez grand. On a alors

$$\mathbf{P}_{i_0,j_0}\left(S > (n+1)d \middle| \mathscr{A}_{(n+1)d}\right) \leq \alpha \max_{1\leq i,j<N} \mathbf{P}_{i,j}\left(S > nd \middle| \mathscr{A}_{nd}\right), \tag{20}$$

La quantité $\max_{1\leq i,j<N} \mathbf{P}_{i,j}\left(S > nd \middle| \mathscr{A}_{nd}\right)$ est donc majorée par α^n, et on conclut alors comme dans le théorème 2. □

On peut expliciter la constante p optimale dans l'équation (14) à partir du spectre de la matrice P. En effet, si on note

$$\lambda_0 = \max\left\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Spec}(\tilde{P}), \lambda \neq \tilde{\lambda}\right\}, \tag{21}$$

alors toute valeur $p > \lambda_0/\tilde{\lambda}$ vérifie (14) pour un certain C. Pour la matrice du jeu de l'oie de l'introduction, on obtient numériquement $\lambda_0 = 1/6$, et on a donc $\lambda_0/\tilde{\lambda} = 0.190$ (à 10^{-3} près).

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

— *Modélisation*
  — Dans l'exemple de l'introduction, quelle matrice de transition obtient-on si on supprime la case piégée ? Dans ce cas, la loi du temps d'absorption est explicite et ne dépend pas de la condition initiale. Pourquoi ? Généraliser.

— *Aspects mathématiques*
  — On pourra démontrer un ou plusieurs des théorèmes 2, 6 et 7. Pour le théorème 7, on pourra admettre un des deux lemmes.
  — Comment doit-on adapter les résultats du texte en présence de plusieurs points absorbants ? Sous la probabilité presque invariante, quelle est la loi du point absorbant en lequel la chaîne finit ? Ce point est-il indépendant du temps d'absorption ?

— *Aspects numériques.*
  — On pourra approcher empiriquement la loi du temps d'absorption, et discuter le théorème 2.
  — On pourra simuler μ^n, pour n grand (pour la chaîne de l'introduction, $n = 10$ devrait suffire), et comparer avec la figure 2.
  — On pourra calculer matriciellement la suite μ^n et illustrer la convergence exponentielle de μ^n vers $\tilde{\mu}$.
  — On pourra simuler le temps d'absorption partant de la loi presque invariante et vérifier qu'il s'agit effectivement d'une variable de loi géométrique.