Mathématiques 2 - Mémento

Licence Sciences et Professorat des écoles
Université de Rennes 1
Jean-Marie Lion

Version provisoire du 2 février 2025

Tant que les études n'auront pas une méthode encyclopédique
de manière à élargir l'horizon au lieu de le restreindre,
il se joindra à tous les obstacles de la pauvreté qui entravèrent le vieux maître d'école,
les obstacles du préjugé qui fait craindre ce qui ne fait pas partie du coin exploré,
comme il arrivait au commandant de la Virginie.

Louise Michel, Mémoires (1886)

Lien vers le programme
Lien vers le memento
Lien vers le résumé des séances 2020-2021
Liens vers les feuilles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12
Lien vers les solutions de certains exercices
Lien vers le sujet du contrôle continu 1 (2019-2020)
Lien vers le sujet du contrôle continu 2 (2019-2020)
Lien vers le sujet du contrôle continu 1 (2020-2021)
Lien vers le sujet du contrôle continu 2 (2020-2021)
Lien vers le sujet du contrôle continu 3 (2020-2021)

Le texte qui suit n'est pas un traité de mathématiques rigoureux qui partirait des axiomes fondateurs. Il repose sur des notions sur lesquelles certainement plusieurs des personnes qui le lisent ont quelques connaissances qu'il a pour but de raviver en indiquant également comment ces notions peuvent s'articuler et être utilisées.

Table des matières

0 Préliminaire numérique

0.1 Les nombres

Tout nombre, qu'il soit *naturel*, *relatif*, *décimal*, *rationnel* ou *réel*, admet une *écriture en base dix* du type $\pm u_n ... u_i ... u_1, d_1 ... d_j ...$ où les u_i et les d_j sont des chiffres de la base dix et u_n est non nul sauf peut-être lorsque $n = 0$. Ainsi le rationnel $\frac{22}{7}$ admet comme début d'écriture $3,142857...$ avec $n = 1$, $u_1 = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 2$, $d_4 = 8$, $d_5 = 4$, $d_6 = 7$,... Le signe $+$ peut être omis mais pas le signe $-$. Sauf les nombres qui peuvent être écrits avec un nombre fini de décimales (c'est à dire ceux qui sont tels que la suite des d_j se termine par une infinité de 0 qu'on omet d'écrire) et qui admettent exactement deux écritures, tout nombre admet une et une seule écriture en base dix : $\frac{1}{3}$ admet comme unique écriture en base dix, $0,333333...$, alors que 1 admet deux écritures, 1 et $0,999999...$

Voici cinq grandes classes de nombres, chacune généralisant la classe précédente.

L'ensemble $\mathbf{N}$ des *entiers naturels* est formé des nombres de la comptine numérique : $0,1,2,3,...,17,$ $...,86,...,421,...,512,...$

L'ensemble $\mathbf{Z}$ des *entiers relatifs* est formé des entiers naturels munis d'un signe $+$ ou $-$: $...,-314,..., -56,...,-21,...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,17,..., 86,...,421,...,512,...$ Tout entier naturel est un entier relatif : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

L'ensemble $\mathbf{D}$ des *décimaux* est formé des nombres positifs ou négatifs dont l'écriture en base dix est finie : $-3,14$, 0 , 7 ou $1,602173634 \times 10^{-19}$ en sont des exemples. Tout entier relatif est un décimal : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$. Ce sont ceux qui admettent deux écritures dont l'une se termine en répétant 9 une infinité de fois.

L'ensemble $\mathbf{Q}$ des *rationnels* est formé des quotients de nombres relatifs par des entiers naturels non nuls : $-\frac{314}{271}$, $\frac{2}{3} = \frac{44}{66} = 0,666666666...$, 0 ou 1 en sont des exemples. Tout nombre décimal est un rationnel : $\mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$.

Les rationnels sont caractérisés par leur écriture en base dix : d'une part l'écriture en base dix d'un rationnel se termine par la répétition infinie d'une séquence finie de chiffres et d'autre part toute écriture en base dix qui se termine par la répétition infinie d'une séquence finie de chiffres est l'écriture d'un rationnel.

L'ensemble $\mathbf{R}$ des *réels* est formé des nombres qui admettent une écriture en base dix quelconque. Tout rationnel est un réel : $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Un réel non nul est dit *strictement positif* si son écriture débute par le signe $+$ et il est dit *strictement négatif* si son écriture débute par le signe $-$. Par exemple, les entiers naturels non nuls sont strictement positifs.

Certains réels ne sont pas des rationnels. C'est le cas du réel x strictement positif qui admet 0 comme unique chiffre à gauche de la virgule et dont toutes les décimales sont nulles sauf celles de rang 1, 2, 4,...,2^n,..., $n \in \mathbf{N}$ qui prennent la valeur 1 :

$$x = 0,1101000100000001000000000000000100 0...$$

L'écriture en base dix de ce réel n'est pas une écriture en base dix qui se termine par la répétition infinie d'une séquence finie de chiffres. Ce n'est donc pas un rationnel.

0.2 Les opérations sur les nombres

Ces cinq ensembles de nombres possèdent tous les nombres 0 et 1 et sont munis de deux opérations, des *lois de composition interne* en langage mathématique, l'*addition* et la *multiplication*, qui vérifient les propriétés suivantes.

Si x et y sont des nombres alors les opérations d'addition et de multiplications leurs associent deux nombres notés $(x+y)$ et $(x \times y)$ et appelés *somme* et *produit* de x et y. Quand il n'y a pas d'ambiguïté on peut omettre les parenthèses.

Le nombre 0 est *le neutre pour l'addition* : si x est un nombre alors $0+x = x+0 = x$.

Le nombre 1 est *le neutre pour la multiplication* : si x est un nombre alors $1 \times x = x \times 1 = x$.

Les opérations d'addition et de multiplication sont *commutatives* : si x et y sont des nombres alors $x+y = y+x$ et $x \times y = y \times x$.

Les opérations d'addition et de multiplication sont *associatives* : si x, y et z sont des nombres alors $x+(y+z) = (x+y)+z$ et $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

L'opération de multiplication est *distributive par rapport à celle d'addition* : si x, y et z sont des nombres alors $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$ et $(x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$.

Tout nombre admet un *opposé* : si x est un nombre il existe un nombre noté $(-x)$ tel que $(-x)+x = x+(-x) = 0$. Si x est un relatif (respectivement, décimal, respectivement rationnel) alors $(-x)$ l'est aussi. En revanche si x est un entier naturel non nul alors $(-x)$ est un relatif mais n'est pas un entier naturel non nul.

L'opposé de la somme $x+y$ de deux réels est la somme des opposés : $(-(x+y)) = (-x)+(-y)$.

Tout nombre non nul admet un *inverse* (pour la multiplication) : si x est un nombre différent de 0 il existe un nombre noté (x^{-1}) ou $\left(\frac{1}{x}\right)$ tel que $(x^{-1}) \times x = x \times (x^{-1}) = 1$. Si x est rationnel non nul alors (x^{-1}) l'est aussi. En revanche si x est un décimal qui n'est pas une puissance de 10, c'est à dire dont l'écriture décimale ne contient qu'un chiffre non nul, 1, et qui n'apparaît qu'une seule fois, alors (x^{-1}) est un rationnel mais n'est pas un décimal.

L'inverse du produit $x \times y$ de deux réels non nul est le produit des inverses : $\frac{1}{(x \times y)} = \left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{1}{y}\right)$.

On peut vérifier en utilisant l'associativité de l'addition et de la multiplication que l'opposé d'un nombre est unique et que si ce nombre est non nul son inverse est unique.

0.3 Les puissances entières et rationnelles

Soit x un réel. On pose $x^0 = 1$. Si n un entier naturel x^n désigne la multiplication n fois de x par lui-même. En particulier $x^0 = 1$ et $x^{n+1} = (x^n) \times x$. Si Si n un entier relatif mais n'est un entier naturel alors x^n est l'inverse de x^{-n} : $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. On a $x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$. Le nombre x^n est appelé *x puissance n*.

Si $x, y \in \mathbf{R}$ et $n, m \in \mathbf{Z}$ alors $(xy)^n = (x^n) \times (y^n)$, $x^{n+m} = (x^n) \times (x^m)$ et $(x^n)^m = x^{n \times m}$.

Si x est un réel positif ou nul et si n est un entier naturel non nul alors il existe un unique réel positif ou nul y tel que $y^n = x$. On note $x^{\frac{1}{n}}$ ce réel. Le nombre $x^{\frac{1}{n}}$ est appelé racine n-ième de x.

Si x est un réel positif ou nul et $r = \frac{p}{q}$ est un rationnel avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$ non nul alors on définit *x puissance r* comme étant le nombre $x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}$. Cette définition ne dépend pas du choix de p et q mais seulement de r.

Si $x, y > 0$ et $r, s \in \mathbf{Q}$ alors $(xy)^r = (x^r) \times (y^r)$, $x^{r+s} = (x^r) \times (x^s)$ et $(x^r)^s = x^{r \times s}$.

Remarquons que si x est un décimal dont l'écriture décimale est $\pm u_n ... u_i ... u_1, d_1 ... d_j ... d_m$ alors $x = \pm(u_1 10^0 + ... + u_n 10^{n-1} + d_1 10^{-1} + ... + d_m 10^{-m})$.

0.4 L'ordre sur les nombres

Les cinq ensembles de nombres **N**, **Z**, **D**, **Q** et **R** sont munis d'un *ordre*. Quand on prend deux nombres x et y, soit ils sont égaux ($x = y$), soit l'un est *strictement supérieur* à l'autre : $x < y$ si $(y - x)$ est strictement positif et $y < x$ si $(x - y)$ est strictement positif. Si y est strictement supérieur à x on dit aussi que x est *strictement inférieur* à y

Un réel x qui vérifie $0 < x$ ou $0 = x$ est dit *positif ou nul* : on écrit alors $0 \leq x$. Un réel x qui vérifie $x < 0$ ou $0 = x$ est dit *négatif ou nul* : on écrit alors $x \leq 0$.

Entre un entier naturel ou relatif n et l'entier $n + 1$ appelé *successeur de n* il n'y a aucun entier : un nombre z qui vérifie $n < z < n + 1$ n'est jamais entier. Par exemple l'entier naturel 315 est le successeur de l'entier naturel 314.

L'ensemble **N** des entiers naturels possède deux propriétés remarquables en lien avec l'ordre et cette notion de successeur. D'une part tout sous-ensemble non vide de **N** admet un *plus petit élément*. C'est un entier naturel appartenant au sous-ensemble et qui est inférieur à tous les autres entiers naturels de ce sous-ensemble. D'autre part tout sous-ensemble non vide de **N** pour lequel il existe un *majorant*, c'est à dire un entier naturel supérieur à tous les entiers naturels de cet ensemble admet aussi *plus grand élément*. C'est un entier naturel appartenant au sous-ensemble et qui est supérieur à tous les autres entiers naturels de ce sous-ensemble.

Dans **R** la notion de successeur n'a pas d'intérêt car si x et y sont deux réels qui vérifient $x < y$ alors il existe un décimal z tel que $x < z < y$.

L'ordre sur **R** se comporte bien par rapport aux deux opérations. Si x, y et z sont des nombres et si $x < y$ alors $x + z = z + x < y + z = z + y$. Si x, y et z sont des nombres et si $x < y$ et $0 < z$ alors $x \times z = z \times x < y \times z = z \times y$.

Soit x un réel non nul. Si $0 < x$ alors $0 < (x^{-1})$ et $(-x) < 0$ et si $x < 0$ alors $(x^{-1}) < 0$ et $0 < (-x)$.

La *partie entière $E(x)$* d'un réel x est définie de la façon suivante. Si x est strictement positif ou s'il est nul c'est l'entier naturel dont l'écriture coïncide avec celle des termes qui apparaissent à gauche de la virgule dans l'écriture de x. Si x est strictement négatif c'est l'entier relatif qui précède celui dont l'écriture coïncide à celles des termes qui, dans l'écriture de x, apparaissent à gauche de la virgule.

Si x est un réel alors sa partie entière $E(x)$ est l'unique entier relatif qui vérifie $E(x) \leq x < E(x)+1$.

L'existence de la *division euclidienne*, c'est à dire le fait que si a est entier relatif et si b est un entier naturel non alors il existe un unique couple (q,r) d'entiers relatifs tel que $a = bq+r$ avec $0 \leq r < b$, est une conséquence directe des propriétés précédentes.

La *valeur absolue* $|x|$ d'un réel x est le plus grand des deux nombres x et $-x$: si $0 \leq x$ alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$. Si x réel alors $-|x| \leq x \leq |x|$.

On peut vérifier que si x et y sont deux réels alors $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$.

1 Éléments de logique et de théorie des ensembles

1.1 Logique

Le dictionnaire de l'Académie française indique que le *raisonnement* est "une manière dont l'esprit enchaîne les unes aux autres des propositions pour établir une vérité (par opposition à l'intuition, au sentiment, à la croyance)" que c'est "une suite ordonnée de raisons, ensemble d'arguments qui s'enchaînent de façon à démontrer, à prouver, à convaincre" et il précise que la *logique* est "la science des règles formelles qui fondent le raisonnement".

Dans les sciences expérimentales un principe essentiel qui guide le raisonnement et de partir des expériences pour tirer des conclusions générales. Lorsqu'on procède ainsi on parle d'un *raisonnement inductif*. Si ceci est bien adapté au cadre expérimental, ça l'est moins en mathématiques quand on veut démontrer. Par exemple, conclure que les entiers naturels premiers sont les nombres impairs différents de 1 parce que 3, 5 et 7 le sont illustre un usage inadapté du raisonnement inductif. En mathématiques on procède différemment. On part de propriétés générales pour en déduire des propriétés particulières. Pour y arriver on met en place un *raisonnement déductif*. Le raisonnement inductif sera utilisé pour établir des conjectures qui sont les questions que les mathématiques cherchent à résoudre.

Donnons maintenant avec des commentaires quelques types de raisonnements classiques qui illustrent dans le domaine des mathématiques les définitions du raisonnement et de la logique donnés par l'Académie.

Exemple En constatant que $0^2 = 0 \geq 0$, $1^2 = 1 \geq 1$, $2,5^2 = 6,25 \geq 2,25$ et $8^2 = 64 \geq 8$ on pourrait conjecturer que le carré de tout nombre réel positif ou nul lui est supérieur ou égal. Or on observe que $0,5^2 = 0,25 < 0,5$. Ainsi la propriété "il existe un nombre réel positif ou nul dont le carré lui est strictement inférieur" est vraie. Donc sa négation qui est la propriété "le carré de tout nombre réel positif ou nul lui est supérieur ou égal" est fausse.

En mathématiques une propriété (ou une proposition, une assertion, un prédicat, un énoncé) est soit vraie soit fausse et il lui est toujours associée une propriété sœur, sa négation. Lorsqu'une propriété P est vraie, sa négation notée $\overline{P}$ est fausse et lorsqu'elle est fausse, sa négation est vraie. De plus la négation de la négation d'une propriété est la propriété elle même : $\overline{\overline{P}} = P$. Démontrer une propriété consiste à établir qu'elle est vraie et si on établit que sa négation est vraie on aura démontré qu'elle est fausse. C'est ce qu'on a fait dans l'exemple précédent et qu'on refait dans l'exemple suivant.

Exemple Peut-on associer à chaque entier naturel un réel de telle sorte qu'à chaque réel au moins un entier ait été associé ? On va voir que c'est impossible en montrant que la négation de la propriété recherchée est vraie. Considérons donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels. Considérons maintenant le nombre réel r de l'intervalle $]0,1[$ défini de la façon suivante. Sa partie entière est 0 et sa partie décimale est une suite de 0 et de 1 données de la façon suivante à partir de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Si $n \in \mathbf{N}$

alors la décimale de rang $n+1$ de r est 1 si la décimale de rang $n+1$ de x_n n'est pas 1 et la décimale de rang $n+1$ de r est 2 si la décimale de rang $n+1$ de x_n est 1. Par construction de r ce réel est différent de tous les réels de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ceci montre qu'étant donnée une suite de réels, il existe toujours au moins un réel qui n'est pas un terme de la suite. Ainsi il est impossible d'associer à chaque entier naturel un réel de telle sorte qu'à chaque réel au moins un entier ait été associé.

Le raisonnement qui vient d'être donné est le raisonnement diagonal découvert par Georg Cantor.

Exemple Les entiers naturels dont la somme des chiffres est divisible par trois et dont le chiffre des unités est divisible par 2 sont les entiers naturels multiples de 2 et 3. En effet ceci est vrai car d'une part les entiers naturels dont la somme des chiffres est divisible par trois sont les entiers naturels multiples de 3 et d'autre part les entiers naturels dont le chiffre des unités est divisible par 2 sont les entiers naturels multiples de 2.

L'exemple précédent utilise le fait que si deux propriétés P et Q sont vraies alors la propriété "P et Q" est vraie.

Exemple Un réel x qui est supérieur ou égal à 1 ou inférieur ou égal à -1 est tel que $1 \leq |x|$. En effet si $x \geq 1$ alors $1 \leq x = |x|$ et si $x \leq -1$ alors $1 \leq (-x) = |x|$.

L'exemple précédent utilise le fait que si une des deux propriétés P et Q est vraie alors la propriété "P ou Q" est vraie.

Exemple Si on souhaite montrer que le carré de tout réel supérieur ou égal à 1 est lui-même supérieur ou égal à ce réel on ne peut se contenter de le constater sur quelques nombres et on ne peut pas tenter de le vérifier pour tous les réels supérieurs ou égaux à 1, un à un. Voilà comment raisonner par déduction pour obtenir ce résultat. Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 1 : $1 \leq x$. Considérons une première propriété générale des réels : si $a,\ b$ et c sont trois réels tels que $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$. Si on applique cette propriété générale avec $a = 0,\ b = 1$ et $c = x$ on obtient que $0 \leq x$. Considérons maintenant une deuxième propriété générale des réels : si $a,\ b$ et c sont des réels qui vérifient $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $c \times a \leq c \times b$. Si on applique cette propriété générale avec $a = 1,\ b = x$ et $c = x$ on obtient que $x = x \times 1 \leq x \times x = x^2$. On vient d'établir par déduction que le carré du nombre réel x supérieur ou égal à 1 est supérieur ou égal à x.

Dans l'exemple précédent le raisonnement qui a été mené est un *syllogisme*. C'est un principe de raisonnement qui consiste à dire qu'étant données deux familles d'objets, si une propriété est vraie pour les objets de la première famille et si les objets de la seconde famille sont des objets de la première famille alors cette propriété est vraie pour les objets de la seconde famille. Un exemple célèbre de syllogisme est le "Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel" d'Aristote.

Exemple Considérons un nombre réel x. Pour montrer que $x^2 < x$ entraîne $x < 1$ il suffit de montrer que $x \geq 1$ entraîne $x^2 \geq x$. Or c'est exactement ce qui est prouvé dans l'exemple précédent. Ainsi $x^2 < x$ entraîne $x < 1$. Mais il faut faire attention : ça ne signifie pas qu'il n'existe pas un réel $x < 1$ tel que $x^2 \geq x$. C'est d'ailleurs le cas avec $x = 0$ ou $x = -1$.

Le raisonnement qui vient d'être fait est un *raisonnement par contraposée*. Il repose sur le fait que si la négation $\overline{Q}$ d'une propriété Q entraîne la négation $\overline{P}$ d'une propriété P alors la propriété P entraîne la propriété Q.

Exemple Le nombre 0 est le neutre pour l'addition. En particulier $0+0 = 0$. De plus la multiplication des réels est distributive par rapport à l'addition. Ces propriétés de 0 et de la multiplication par rapport à l'addition impliquent que 0 ne peut pas avoir d'inverse. Pour le montrer on va montrer que l'hypothèse 0 a un inverse conduit à une contradiction. Supposons donc que 0 ait un inverse. Il existerait donc un réel x tel que $= 1 = x \times 0$. Ceci entraînerait $1 = x \times 0 = x \times (0+0) = (x \times 0) + (x \times 0) = 1+1 = 2$ et donc $1 = 2$. C'est la contradiction recherchée.

Le raisonnement qui vient d'être fait est un *raisonnement par l'absurde*. Il repose sur le fait que si la négation $\overline{P}$ d'une propriété P entraîne une propriété Q et la négation $\overline{Q}$ de Q, ce qui est une contradiction alors la propriété P est vraie.

Exemple Un entier naturel est dit *premier* s'il possède exactement deux diviseurs,1 et lui-même. En particulier 1 n'est pas premier mais 2, 3, 5, 7 le sont. Montrons en raisonnant par l'absurde qu'il y a une infinité de nombres premiers (propriété P). Supposons donc que $\overline{P}$ soit vraie. Soit alors $p_1,...,p_n$ la liste finie de tous les nombres premiers et considérons l'entier $p = 1 + p_1 \times ... \times p_n$. Ce nombre n'admet comme diviseur aucun des nombres $p_1,...,p_n$ puisque la division euclidienne de p par l'un d'eux a comme reste 1. Par conséquent les nombres premiers qui divisent p ne sont pas dans la liste $p_1,...,p_n$ qui est censée tous les contenir. C'est la contradiction recherchée.

Exemple On souhaite montrer que si n est un entier naturel non nul alors 2^n c'est à dire le produit n fois de 2 par lui même est supérieur ou égal à n : $2^n \geq n$. Or on constate que $2^1 = 2$ est bien supérieur ou égal à 1. Le résultat annoncé est donc vrai si $n = 1$. De plus on observe que si n est un entier naturel non nul alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n$. Par conséquent si $2^n \geq n \geq 1$ alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n \geq n + n \geq n + 1$. Donc lorsque $2^n \geq n$ alors $2^{n+1} \geq n + 1$. La propriété recherchée qui est $2^n \geq n$ quel que soit l'entier naturel non nul n se propage de proche en proche, est héréditaire. Comme elle est vraie pour $n = 1$ un des théorèmes fondamentaux de la logique dit que ça suffit pour conclure que le résultat recherché est bien vrai.

Le théorème fondamental de la logique évoqué dans l'exemple précédent est le *principe de récurrence* qui permet de faire un *raisonnement par récurrence*. Il dit que si on considère un entier naturel p fixé et une famille de propriétés $P_n, n \in \mathbf{N}, n \geq p$ numérotées par les entiers naturels supérieurs ou égaux à p, pour montrer que les propriétés P_n sont toutes vraies à partir du rang p il suffit de montrer que la propriété P_p est vraie et de montrer que si n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à p la véracité de la propriété P_n entraîne la véracité de la propriété P_{n+1}. Il y a un point subtil dans ce raisonnement. Lorsqu'on le fait on ne sait pas si P_n est vraie, on ne fait que le supposer. Pour que le raisonnement soit complet il est indispensable de vérifier que P_p est vrai.

1.2 Ensembles

Les mathématiques étudient des *objets*, par exemple les *nombres* dont une présentation a été faite dans le chapitre préliminaire, les *ensembles*, les *éléments*, les *points*, les *droites*, les *plans*, les *figures géométriques*, les *fonctions*, les *applications* ou les *probabilités*, leurs *propriétés* et les *relations* entre eux.

Pour désigner un objet, soit particulier soit quelconque, on lui donne généralement un "nom propre" souvent réduit à une lettre minuscule ou majuscule, latine ou grecque, ou à des chiffres.

Avec les nombres qui ont déjà été évoqués, les *éléments* et les *ensembles* sont des objets qu'on pourrait qualifier d'initiaux. On les rencontre dans tous les champs des mathématiques.

Un *ensemble* E est un objet mathématique constitué des *éléments* qu'il *contient* c'est à dire des éléments qui *appartiennent* à l'ensemble E.

Notation Si E est un ensemble et x un élément alors écrire $x \in E$ signifie x appartient à E et écrire $x \notin E$ signifie x n'appartient pas à E.

Un ensemble peut être donné *par extension* en donnant la liste exhaustive de ses éléments. Par exemple $E = \{A, B, C\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont A, B et C. Il peut être donné *par compréhension* c'est à dire par une phrase. Par exemple l'ensemble E précédent est l'ensemble des trois premières lettres de l'alphabet écrites en capitale.

Il existe un ensemble particulier, c'est l'*ensemble vide* qui est noté $\emptyset$ et qui ne contient aucun élément. Autrement dit, quel que soit l'élément α la phrase "$\alpha \in \emptyset$" n'est pas vraie. L'ensemble vide à la propriété remarquable d'être un *sous-ensemble* de tous les ensembles, il est *inclus* dans chacun d'eux.

Une question naturelle en mathématiques est la suivante. Étant donné un élément nommé α et un ensemble nommé X, on peut se demander si l'élément α *appartient* à l'ensemble X, c'est à dire si l'ensemble X contient l'élément α. Ceci revient à se demander si la *phrase mathématique* "$\alpha \in X$" qui se dit "α appartient à X" ou "X contient α est vraie ou non.

Une deuxième question naturelle est de savoir, étant donnés deux ensembles X et Y, si X est un *sous-ensemble* de Y, c'est à dire si X est *inclus* dans Y et ceci signifie que quel que soit l'élément α de X c'est aussi un élément de Y. Ceci revient à se demander si la phrase mathématique "$X \subset Y$" qui se dit "X est inclus dans Y" ou encore "X est un sous-ensemble de Y" est vraie ou non. Ceci revient aussi à se demander si la phrase mathématique "si $\alpha \in X$ alors $\alpha \in Y$" qui se dit "si un élément α appartient à X alors il apparient à Y" est vraie ou non.

Notation Si X et Y sont des ensembles alors écrire $X \subset Y$ signifie X est inclus dans Y et écrire $X \not\subset Y$ signifie X n'est pas inclus sans Y.

Une troisième question naturelle est de se demander si deux ensembles sont égaux ? Cette question revient à demander si les deux ensembles ont exactement les mêmes éléments c'est à dire elle revient à demander si la *phrase mathématique* "si $\alpha \in X$ alors $\alpha \in Y$ et si $\alpha \in Y$ alors $\alpha \in X$" est vraie. Cette question revient aussi à demander si l'ensemble X est inclus dans l'ensemble Y et si l'ensemble Y est inclus dans l'ensemble X.

Notation Si X et Y sont des ensembles alors écrire $X = Y$ signifie X et Y sont égaux et écrire $X \neq Y$ signifie X et Y ne sont pas égaux.

On peut combiner des ensembles pour en obtenir de nouveaux. Ainsi si X et Y sont deux ensembles, l'*intersection* $X \cap Y$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à la fois à X et à Y, la *réunion* $X \cup Y$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à X ou à Y, la *différence* $X \setminus Y$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à X mais qui n'appartiennent pas à Y, et la *différence symétrique* $X \Delta Y$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à la réunion $X \cup Y$ mais qui n'appartiennent pas à l'intersection $X \cap Y$: $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. Lorsque Y est un sous-ensemble de X alors $X \setminus Y$ est appelé complémentaire de Y. On le note $\overline{Y}$ ou $\overline{Y}^X$. On a $\overline{\overline{Y}} = Y$.

Si X, Y et Z sont trois ensembles alors

$$
\begin{aligned}
&X \cap Y = Y \cap X,\ X \cup Y = Y \cup X,\ X \Delta Y = Y \Delta X,\\
&X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z,\ X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,\ X \Delta (Y \Delta Z) = (X \Delta Y) \Delta Z,\\
&X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),\ X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z),\\
&X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).
\end{aligned}
$$

Ceci signifie que $\cap$, $\cup$ et Δ sont commutatives et associatives, que $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$ et Δ et que $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$.

On peut voir que $\emptyset$ est le neutre pour $\cup$ et Δ et que si on se restreint à ne considérer que des sous-ensembles d'un ensemble E fixé alors E est le neutre pour $\cap$.

Pour s'initier aux propriétés des ensembles il peut être utile de faire des schémas où les ensembles X, Y et Z sont représentés par trois disques qui partagent en commun une zone bordée par trois arcs de cercle.

On peut aussi s'intéresser au *produit cartésien* qui est l'ensemble formé des couples (x, y) avec x élément quelconque de X et y élément quelconque de Y. Si X, Y et Z sont trois ensemble on identifie $X \times (Y \times Z)$ et $(X \times Y) \times Z$.

Enfin signalons qu'étant donné un ensemble E il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ et appelé *ensemble des parties* de E dont les éléments sont les sous-ensembles de E. En particulier les ensembles $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

2 Expressions et calculs littéraux

Définition Une *expression littérale* est une succession de caractères dont les lettres (latines et grecques en particulier, minuscules et capitales), les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, des symboles comme $+$, $-$, $\times$, ——, (et), construite à partir de certaines règles et qui a une signification mathématique. Les *variables* ou *paramètres* d'une expression littérale sont les lettres ou des mots (c'est à dire des suites finies de lettres) qui apparaissent dans l'expression. Si pour toute variable qui apparaît dans une expression littérale, on remplace chaque occurrence par le même nombre, on peut calculer l'expression et obtenir une valeur, lorsque c'est licite. Le *calcul littéral* est le processus qui permet d'engendrer des expressions littérales et de les évaluer.

Voici une liste non exhaustive de règles qui régissent l'écriture et l'évaluation d'expressions littérales.

Règle 1 Un nombre ou une variable sont des *expressions littérales*. Remplacer une variable seule par un nombre donné revient à évaluer cette expression littérale.

Règle 2 Si E et F sont des expressions littérales alors $(-E)$, $\left(\frac{1}{E}\right)$, (E^{-1}), $(E+F)$, $(E-F)$, $(E\times F)$, $\left(\frac{E}{F}\right)$, $(E\times(F^{-1}))$ et $\left(E^F\right)$ sont des expressions littérales. On déduit du calcul des expressions E et F en substituant aux occurrences de toute variable un nombre le calcul de ces nouvelles expressions littérales.

Règle 3 Si E et F sont des expressions littérales et si f est une variable de E alors on peut substituer dans E chaque occurrence de f par une occurrence de F pour obtenir une nouvelle expression littérale notée $(E(F))$. On déduit du calcul des expressions E et F en substituant aux occurrences de toute variable un nombre le calcul de $(E(F))$.

Règle 4 En utilisant les propriétés de commutativité, d'associativité, de distributivité des opérations on peut transformer une expression littérale initiale en une expression littérale qui prend la même valeur que l'expression initiale lorsqu'on remplace toutes les occurrences de chaque variable par le même nombre dans chaque expression.

Règle 5 On peut simplifier des expressions littérales selon certaines règles de priorité. Donner la priorité de la multiplication sur l'addition et l'associativité de ces opérations permet d'alléger le parenthésage.

Règle 6 L'écriture $(-E)$ est une écriture simplifiée de $((-1)\times E))$. L'écriture $(E-F)$ est une écriture simplifiée de $(E+((-1)\times F))$. Les écritures $\left(\frac{1}{E}\right)$ et (E^{-1}) sont équivalentes. Les écritures $\left(\frac{E}{F}\right)$ et $(E\times(F^{-1}))$ sont équivalentes.

Exemple $(((a-b)\times(a+b))+(b\times b))-(a\times a)$ est une expression littérale. On peut vérifier qu'en remplaçant a par 7 et b par 13 on obtient comme valeur 0. On peut aussi utiliser la règle 4 pour transformer cette expression en l'expression 0. Ceci implique en particulier que cette expression ne prend que la valeur 0.

Exemple $\frac{a}{b}$ est une expression littérale. On peut l'évaluer en remplaçant a par un réel quelconque et b par un réel non nul quelconque.

Définition Une *fonction* (numérique de la variable réelle) f est un objet mathématique qui à tout réel x d'un sous-ensemble D_f de $\mathbf{R}$ appelé *domaine de définition* de f associe un réel noté $f(x)$.

Exemple Soit F une expression littérale qui ne contient qu'une variable. Alors F définie une fonction numérique f dont le domaine de définition D_f est l'ensemble des valeurs pour lesquelles F peut être évaluée.

Exemple Le calcul littéral permet d'établir que si $n\in\mathbf{N}$ alors

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Exemple Le calcul littéral permet d'établir les identités

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

3 Proportionnalité & applications

3.1 Proportionnalité

Définition On considère une famille O d'objets. On suppose qu'à chaque objet o de cette famille sont associés deux nombres $x(o)$ et $y(o)$ non nuls. Les deux familles x et y de *grandeurs* formées pour l'une des nombres $x(o)$ lorsque o décrit la famille O et pour l'autre des nombres $y(o)$ lorsque o décrit la famille O, sont dites *proportionnelles* s'il existe un réel λ tel que $\lambda \times x(o) = y(o)$ quel que soit o objet de O. Le nombre λ est le coefficient de proportionnalité de y par rapport à x.

Si x, y et z sont des grandeurs associées à une même famille d'objets O sont telles que d'une part x et y sont proportionnelles et d'autre part y et z sont proportionnelles alors x et z sont proportionnelles. De plus si λ est le coefficient de proportionnalité de y par rapport à x et si μ celui de z par rapport à y alors $\lambda \times \mu$ est le coefficient de proportionnalité de z par rapport à x.

3.2 Pourcentage

Définition Étant donnée une quantité Q, considérer $x\%$ de cette quantité revient à considérer la quantité Q' définie par

$$Q' = \frac{x}{100} \times Q.$$

On dit que le pourcentage de la quantité Q que représente la quantité Q' et $x\%$.

Par conséquent ajouter $x\%$ à Q revient à considérer la quantité Q" définie par

$$Q'' = Q + Q' = Q + \frac{x}{100} \times Q = (1 + \frac{x}{100}) \times Q = \frac{100+x}{100} \times Q.$$

Alors le pourcentage de la quantité Q que représente la quantité Q'' et $100 + x\%$.

Exemple Un tableau qui coûtait 2400 € en 2002 a augmenté de 30% en 18 ans. Son augmentation sur cette période est de $\frac{30}{100} \times 2400$ € c'est à dire de 720 €. Son prix en 2020 est donc de $2400 + 720$ € c'est à dire de 3120 €. Ce prix est aussi égal $(1 + \frac{30}{100}) \times 2400$ € ou encore à $(\frac{100+30}{100}) \times 2400$ €. Ces 3120 € représentent 130% des 2400 € initiaux. De même retirer $x\%$ à Q revient à considérer la quantité Q''' définie par

$$Q''' = Q - Q' = Q - \frac{x}{100} \times Q = (1 - \frac{x}{100}) \times Q = \frac{100-x}{100} \times Q.$$

Alors le pourcentage de la quantité Q que représente la quantité Q''' et $100 - x\%$.

Exemple Une personne de 54 kg perd 5% de sa masse pendant un marathon. Sa perte de masse au cours de la course est donc de $\frac{5}{100} \times 54$ kg c'est à dire de 2,7 kg. Sa masse à la fin de l'épreuve est donc de $54 - 2,7$ kg c'est à dire de 51,3 kg. Cette masse est aussi égale $(1 - \frac{5}{100}) \times 54$ kg ou encore à $(\frac{100-5}{100}) \times 54$ kg. Ces 51,3 kg représentent 95% des 54 kg initiaux.

Attention, transformer Q en Q' par un ajout à Q de $x\%$ de Q puis retirer à Q' $x\%$ de Q' ne permet pas de revenir à Q car $x\%$ de Q et $x\%$ de Q' sont deux quantités différentes si x n'est pas nul.

Exemple Le cours d'une matière première augmente de 10% pendant une année puis baisse de 10% pendant l'année suivante. Si avant l'augmentation le cours de la tonne été de 420 € son cours après deux ans est $(1-\frac{10}{100})\times\big((1+\frac{10}{100})\times 420\big)$ € c'est à dire de 415,8 €. La perte en deux ans est de 4,2 € par tonne.

Étant données deux quantités Q et Q' on peut souhaiter savoir quel pourcentage de Q représente Q' et quel pourcentage de Q' représente Q. Le calcul permet de voir que la quantité Q' représente $\frac{Q'}{Q}\times 100\%$ de la quantité Q et la quantité Q représente $\frac{Q}{Q'}\times 100\%$ de la quantité Q'.

Exemple Le cours d'une action est passé de 55 € le 31 décembre 2007 à 44 € le 31 décembre 2008. Sur la même période le cours d'une obligation est passé de 44 € à 55 €. En un an l'action a donc perdue 11 € c'est à dire $\frac{11}{55}\times 100\%$ ou 20% de sa valeur initiale. Sur la même période l'obligation a donc gagnée 11 € c'est à dire $\frac{11}{44}\times 100\%$ ou 25% de sa valeur initiale.

Une quantité Q qui connaît n augmentations successives de $x\%$ vaut $Q'=(1+\frac{x}{100})^n\times Q$ après ces augmentations. Si elle connaît des n diminutions successives de $x\%$ elle vaut $Q'=(1-\frac{x}{100})^n\times Q$ après ces diminutions.

Exemple Un objet qui coûtait 150 € en 2002 a augmenté de 1,5% par an pendant 18 ans. Son prix en 2020 est donc de $(1+\frac{1{,}5}{100})^{18}\times 150$ € ou encore à $(\frac{101{,}5}{100})^{18}\times 150$ € c'est à dire de 196,10 €.

Exemple Une quantité, après avoir subi une augmentation de $x\%$ vaut Q'. L'expression de la quantité initiale Q en fonction de Q' est donc $Q=\frac{1}{1+\frac{x}{100}}Q'$. On va calculer la différence entre Q et l'approximation $\tilde{Q}$ obtenue en posant $\tilde{Q}=(1-\frac{x}{100})Q'$. Le calcul donne $Q-\tilde{Q}=\frac{1}{1+\frac{x}{100}}\left(\frac{x}{100}\right)^2Q'$ et donc $0<Q-\tilde{Q}<\left(\frac{x}{100}\right)^2Q'$ si $0<x<100$. Si par exemple $x=1$ alors l'erreur obtenue en remplaçant Q par $\tilde{Q}$ est de $10^{-4}Q'$: elle est donc très faible par rapport à Q'.

3.3 Échelle

Lorsqu'on réalise une représentation d'une configuration réelle comme le plan d'un bâtiment ou d'une ville, le dessin technique d'un objet, la carte d'une zone géographique, le schéma d'un composant électronique, la maquette d'un objet ou d'un bâtiment, on veille à ce que le rapport λ entre une longueur représentée et la longueur réelle correspondante soit indépendant de la longueur. Ce rapport λ s'appelle l'échelle de la représentation. S'il est plus petit que 1 les longueurs de la représentation sont plus petites que les longueurs réelles, s'il est plus grand que 1 elle sont plus grandes. On représente souvent l'échelle sous forme fractionnaire.

Exemple Sur une carte au 1/25000ème qu'on note aussi au 1:25000, une longueur de 1 cm sur la carte représente 25000 cm dans la réalité c'est à dire 250 m. Inversement, une route de 20 km sera représentée sur la carte par une ligne de $\frac{1}{25000}$ km c'est à dire 0,0008 km ou 0,8 m ou encore 80 cm.

Lorsqu'une configuration est représentée à l'échelle λ on passe des longueurs réelles aux longueurs représentées par multiplication par λ, on passe des surfaces réelles aux surfaces représentées par multiplication par λ^2 et on passe des volumes réels aux volumes représentés par multiplication par λ^3.

Exemple Si la profondeur d'une pièce d'un logement est représentée sur un plan au 1/20ème par une longueur de 24 cm alors la profondeur réelle de la pièce est de 20×24 cm c'est à dire 480 cm ou 4,80 m.

Exemple Si un appartement est représenté sur un plan au 1/50ème par une surface de 340 cm^2 alors son aire réelle est de $50\times 50\times 340$ cm^2 c'est à dire 850000 cm^2 ou 85 m^2.

Exemple La célèbre statue de la Liberté domine l'entrée du port de New-York de ses 46 m de haut. Pour honorer Bartholdi son créateur, sa la ville de naissance, Colmar, en a commandé une réplique de 12 m de haut, installée à l'entré de la cité alsacienne. L'échelle de cette représentation est donc de $\lambda=\frac{12}{46}$ c'est à dire de $\lambda=0,26$. Si on suppose que la masse m de l'édifice new-yorkais est de 220 tonnes alors, sa réplique, si elle avait été réalisée strictement à l'échelle et dans les mêmes matériaux, aurait une masse (proportionnelle au volume) de $\lambda^2\times m$ c'est à dire de $0,26^2\times 220$. Le calcul donne

3,87 tonnes.

Lorsqu'on fait une représentation graphique un axe représente une donnée qui s'exprime dans une unité fixée. Le rapport entre une longueur représentée et la donnée réelle correspondante exprimée dans l'unité fixée est indépendant de la longueur. Ce rapport s'appelle l'*échelle de la représentation*.

Exemple On peut imaginer la représentation de l'évolution de la température au cours d'une journée de telle sorte qu'un cm de l'axe des abscisses représente 120 min et que un cm sur l'axe des ordonnées représente 2 °C. Représenter une variation de température de 20 °C dans une journée nécessite de faire une représentation graphique qui fasse plus de 10 cm de haut. Représenter une journée complète nécessite que cette représentation graphique fasse plus de 12 cm de large.

3.4 Vitesse et vitesse moyenne

Définition On appelle *vitesse moyenne* le rapport entre la variation d'une quantité et le temps écoulé.

Exemple Selon Eurail 2020 la distance ferroviaire entre Paris et Rennes est de 374 km et le TGV 8601 la parcourt en 1 h 25 min. La vitesse moyenne de ce train est donc $v = \frac{374}{1+\frac{25}{60}}$ km/h c'est à dire 264 km/h.

Exemple On remplit un bassin de 240 litres en 5 minutes c'est à dire en 300 secondes. La vitesse moyenne de remplissage est donc de 48 l/min c'est à dire de 0,8 l/s

Exemple Un groupe de randonnée parcourt un chemin côtier d'ouest en est sur une distance de 4,5 km pendant 1 h 15 min et au retour il réalise la même distance en 1 h 45 min. La vitesse moyenne du parcours complet est donc $\frac{4{,}5+4{,}5}{(1+\frac{15}{60})+(1+\frac{45}{60})}$ km/h c'est à dire de 3 km/h.

Exemple Lors d'une sortie, un groupe de cyclistes parcourt une distance de 20 km à la vitesse de 25 km/h puis une distance de 8 km à la vitesse de 16 km/h. La distance totale parcourue est de $20+8$ km. Le temps total de parcours est de $\frac{20}{25}+\frac{8}{16}$ h c'est à dire 1,3 h ou encore 1 h 18 min. La vitesse moyennes de la sortie est donc de $\frac{28}{1{,}3}$ km/h c'est à dire de 21,5 km/h.

La vitesse moyenne est à rapprocher de la *moyenne* de quantités de même type.

Définition Si $Q_1,\dots,Q_n$ sont des quantités de même type leur *moyenne* est le nombre $\frac{1}{n}(Q_1+\dots+Q_n)$.

Définition Si $Q_1,\dots,Q_n$ sont des quantités de même type affectées de *coefficients de pondération* $\mu_1,\dots,\mu_n$ alors la *moyenne pondérée* associée est le nombre $\frac{1}{\mu_1+\dots+\mu_n}(\mu_1 Q_1+\dots+\mu_n Q_n)$.

La vitesse moyenne peut être interprétée comme le taux d'accroissement d'une fonction entre de deux nombres.

Définition Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. Si $x \neq x' \in I$ alors le taux d'accroissement de f entre x et x' est le nombre $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$.

Si la fonction f représente l'évolution d'une grandeur en fonction du temps alors la vitesse moyenne d'évolution de cette grandeur entre les temps x et x' est exactement le taux d'accroissement de f entre x et x'.

La vitesse moyenne ne nécessite de connaissances mathématiques que celles de différence et de quotient de deux nombres. La *vitesse instantanée* repose sur une notion mathématique plus avancée, celle de dérivée.

Définition Supposons que l'évolution d'une quantité au cours du temps soit représentée par une fonction numérique $f : I \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle et dérivable. Alors la *vitesse instantanée* d'évolution de la quantité étudiée à l'instant $t \in I$ est égale à la dérivée $f'(t)$ de f évaluée en t.

En pratique on approxime, on approche, la vitesse instantanée par le calcul d'une vitesse moyenne sur un temps très court.

Exemple Supposons que la position en fonction du temps d'un objet se déplaçant de façon rectiligne est donnée par la fonction $f(t)$ qui à t associe $f(t) = at^2+bt+c$. Soit $t \neq t'$ alors la vitesse moyenne de l'objet entre les temps t t' est $v(t,t') = \frac{f(t')-f(t)}{t'-t}$ c'est à dire $v(t,t') = \frac{a(t'^2-t^2)+b(t'-t)}{t'-t}$. En utilisant l'identité remarquable $t'^2 - t^2 = (t'-t)(t'+t)$ on obtient $v(t,t') = a(t'+t)) + b$. Si on prend $t' = t$ ce calcul donne comme fonction plausible pour être la vitesse instantanée la fonction définie par $v(t) = 2at + b$. Le *calcul différentiel* qui est la théorie qui fonde le calcul des dérivées confirme que cette fonction est bien la vitesse instantanée.

3.5 Unités de mesure et conversion

Définition Pour traduire mathématiquement une grandeur physique, chimique, biologique, écologique, informatique, économique, sociale, humaine, c'est à dire pour l'exprimer par un nombre on doit d'abord choisir une gradeur du même type qui sera la référence et qu'on nomme *unité* puis exprimer le rapport entre la grandeur et l'unité.

Un producteur d'œufs pourra utiliser comme unité l'œuf mais son choix n'aura que l'universalité de l'œuf. On va préférer des systèmes d'unité qui ne sont pas liés à l'objet mais plutôt à ses caractéristiques (dimensions, masse, prix...).

Pour mesurer des longueurs on peut utiliser le mètre et ses dérivés (kilomètre, décimètre, centimètre, millimètre) : 1 km=1000 m et 1 m=10 dm=100 cm=1000 mm.

On peut utiliser les unités anglo-saxonnes comme le pouce (2,54 cm), le pied qui vaut 12 pouces (30,48 cm), le yard qui vaut 3 pieds donc 36 pouces (91,44 cm), le mile qui vaut 5280 pieds (1609,344 m soit 1,609344 km).

L'unité de mesure surfacique classique est le mètre carré (m^2) qui correspond à la surface d'un carré de 1 m de côté. Les unités dérivées du mètre carré sont le kilomètre carré (km^2), le décimètre carré (dm^2), le centimètre carré (cm^2) et le millimètre carré (mm^2) : 1 km^2=1000000 m^2 et 1 m^2=100 dm^2=10000 cm^2=1000000 mm^2. On utilise aussi l'are (a) (ou décamètre carré) qui correspond à la surface d'un carré de 10 m de côté et l'hectare (ha) qui correspond à la surface d'un carré de 100 m de côté : 1 ha=10000 m^2 et 1 a=100 ^{2}.

L'unité de mesure volumique classique est le mètre cube (m^3) qui correspond au volume d'un cube de 1 m de côté. Les unités dérivées du mètre cube sont le décimètre cube (dm^3), le centimètre cube (cm^3) et le millimètre cube (mm^3) : 1 m^3=1000 dm 3=1000000 cm^3=10^9 mm^3.

Une autre unité de mesure volumique est le litre (l ou L) qui correspond au volume d'un cube de 10 cm de côté, c'est à dire d'un cube de 1000 cm^3. Les unités dérivées du litre sont le décilitre (dl), le centilitre (cl) et le millilitre (ml) : 1 m^3=1000 l et 1 l=10 dl=100 cl=100 ml.

L'unité de mesure de temps classique est la seconde (s), la minute (min), l'heure (h), le jour (j ou d), l'année (a) : 1 a=365,25 j, 1 j=24 h=86400 s, 1 h=60 min=3600 s. On subdivise la seconde en dixième (ds), centième (cs), millième (ms), millionième (μs) de seconde.

L'unité de masse classique et le kilogramme (kg) qu'on divise en hectogramme (hg), décagramme (dag), gramme (g) décigramme (dg), centigramme (cg) et milligramme (mg) : 1 kg=10 hg=100 dag et bien sûr 1 kg=1000 g et 1 g=10 dg=100 cg=1000 mg. La tonne (t) qui représente 1000 kg et le quintal (q) qui représente 100 kg sont aussi des unités de masse d'usage répandu.

Pour obtenir des unités de vitesse on quotiente des unités de quantités avec des unité de temps. On obtient ainsi des km/h et des m/s pour des vitesses classiques des m^3/s pour des débits d'écoulement.

On peut citer les unités monétaires comme l'euro, le franc, la livre sterling le dollar, le yen : 1 euro=6,559583 franc, 1 livre sterling=1,19 euros (au 20/02/20), 1 dollar=0,93 euro (au 20/02/20) et 1 yen = 0,0083 euro.

L'expression numérique d'une quantité dépend de l'unité choisie. Le changement d'unités correspond à un changement d'échelle : si une grandeur est exprimée dans une première unité par un nombre x_1 et si cette première unité est dans un rapport λ avec une seconde unité alors dans cette seconde unité la grandeur est représentée par un nombre x_2 égal à λx_1.

Exemple Le SMIC annuel brut est au 20/02/20 à 18473 euro. Or 1 euro correspond à 6,559583 franc. Par conséquent le SMIC annuel brut est au 20/02/20 à 121175,176759 franc.

Il est important d'observer l'influence de la dimension (1, 2 ou 3) dans les changements d'unités de longueur, de surface et de volume : si une unité de longueur est dans un rapport λ avec une seconde unité de longueur alors les unités de surface et de volumes correspondantes seront respectivement dans des rapports λ^2 et λ^3.

Exemple Considérons un terrain de 120 m de long et de 90 m de large. Sa surface est donc de 120×90 m^2 c'est à dire 10800 m^2. Puisque un yard vaut 91,44 cm donc 0,9144 m, 1 m vaut 1,0936 yard. Par conséquent le terrain fait $1,0936 \times 120$ yard de long et $1,0936 \times 90$ yard de large, c'est à dire 131,23 yard de long et 98,42 yard de large. Sa surface est $1,0936^2 \times 10800$ yard^2 c'est à dire de 12916,69 yard^2.

4 Fonctions usuelles, mise en équation et résolution de problèmes

4.1 Rappels sur les fonctions usuelles

Comme il a déjà été dit une fonction (numérique de la variable réelle) est un objet mathématique qui à tout réel d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ appelé domaine de définition de la fonction associe un unique réel. Il a aussi été indiqué qu'une expression littérale qui ne contient qu'une variable définie une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des valeurs pour lesquelles F peut être évaluée.

Exemples Voici quelques exemples de fonctions classiques

Les *fonctions linéaires*. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite *linéaire* s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = ax$. Par exemple la fonction qui à un nombre associe son double est linéaire. La fonction qui au rayon d'un cercle associe son périmètre est aussi linéaire et dans ce cas $a = 2\pi$.

Les *fonctions affines*. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite *affine* s'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = ax + b$. Par exemple la fonction qui à un nombre associe la somme de son double et de 3 est affine. La fonction qui à une température exprimée en degré Celsius (˚C) associe cette même température exprimée en degré Fahrenheit (˚F) est affine : c'est la fonction f définie par $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$. C'est le cas également de la fonction qui à une température exprimée en degré Celsius (˚C) associe cette même température exprimée en degré Kelvin (K) : c'est la fonction f définie par $f(x) = x + 273,15$.

Les *homographies*. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une *homographie* s'il existe $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ avec $ad - bc \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Par exemple la fonction qui à un nombre associe $\frac{1}{1-x}$ est une homographie. La fonction qui au taux d'inflation entre le 01/07/2009 et le 01/07/2016 associe l'évolution en euros constants du point d'indice de la fonction publique est une homographie : c'est la fonction qui à $x \in [1; 1,07332]$ associe $f(x) = \frac{1}{x} \times 55,5635$.

La *racine carrée*. C'est la fonction qui à x réel positif ou nul associe l'unique réel positif ou nul noté $\sqrt{x}$ et qui vérifie $(\sqrt{x})^2 = x$. Cette fonction exprime la longueur du côté d'un carré dont on connaît l'aire. Combinée à la fonction linéaire qui à x associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}}x$ elle permet de calculer le rayon d'un disque dont on connaît l'aire : la fonction qui à x réel positif associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$ exprime le rayon d'un disque en fonction de son aire.

La fonction *polynôme du second degré*. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un *polynôme du second degré* s'il existe $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$. Cette fonction joue un rôle essentielle dans la description du mouvement d'un objet lancé verticalement au temps $t = 0$ de la hauteur h et à la vitesse v. Le mouvement est alors donné par la fonction x qui vérifie

$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + h$ si on compte positivement l'élévation. Le nombre g s'appelle l'accélération. Si l'unité de temps est la seconde et l'unité de longueur le mètre alors $g = 9,80665$ m/s^2 à la surface de la Terre.

Définition Une fonction numérique de domaine de définition D_f est dite *monotone* en restriction à un sous-ensemble E de D_f si le signe de $f(x') - f(x)$ ne dépend pas de $x, x' \in E$ vérifiant $x < x'$. Si de plus $f(x') - f(x)$ ne s'annule que si $x = x'$ la fonction est dite strictement monotone en restriction à E.

Définition Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f et supposée monotone (respectivement strictement monotone) en restriction à un sous-ensemble E de D_f. Elle est dite *croissante* (respectivement *strictement croissante*) en restriction à E si $f(x') - f(x)$ est positif ou nul (respectivement strictement positif) pour tous les $x, x' \in E$ vérifiant $x < x'$. Elle est dite *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) en restriction à E si $f(x') - f(x)$ est négatif ou nul (respectivement strictement négatif) pour tous les $x, x' \in E$ vérifiant $x < x'$.

Exemple Une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est strictement croissante si $a > 0$, elle est strictement décroissante si $a < 0$ et elle est constante si $a = 0$.

Exemple La fonction racine carrée est strictement croissante.

Exemple L'homographie définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas monotone mais ses restrictions à $(-\infty, 0[$ et à $]0, +\infty)$ sont strictement décroissantes.

Exemple Une fonction du type $f(x) = a((x-\alpha)^2 + \beta)$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[\alpha, +\infty)$ si $a > 0$ (respectivement si $a < 0$). Elle est strictement décroissante (respectivement strictement croissante) sur $(-\infty, \alpha]$ si $a > 0$ (respectivement si $a < 0$).

L'étude de la monotonie d'une fonction est souvent menée à l'aide de l'étude de la *dérivée* de la fonction lorsque celle-ci est *dérivable*. Ceci ne sera pas abordé ici. En revanche on peut lier monotonie et taux d'accroissement de la façon suivante.

Propriété La restriction d'une fonction f à un sous-ensemble E de son domaine de définition D_f est monotone (respectivement croissante/décroissante) si le taux d'accroissement $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ possède un signe constant (respectivement un signe positif/un signe négatif) quels que soient $x \neq x' \in E$. Elle est strictement monotone si de plus le taux d'accroissement ne s'annule pas lorsque $x \neq x' \in E$.

4.2 Équations du 1er et 2e degré

Définition Une *équation du premier degré* ou *équation linéaire* est une équation d'inconnue x du type $ax + b = 0$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

Si $a \neq 0$ l'équation admet une et une seule solution qui est $x = -\frac{b}{a}$. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ l'équation n'admet aucune solution. En revanche si $a = b = 0$ alors tout réel x est solution.

Propriété Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$. La fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit aussi $f(x) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.

Définition Une *équation du second degré* est une équation d'inconnue x du type $ax^2 + b + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$.

Propriété La résolution de cette équation passe par une discussion sur l'étude du signe du *discriminant* Δ de cette équation. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + b + c = 0$ n'a aucune solution.

- Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + b + c = 0$ a une seule solution dite *racine double* et qui vaut $r = \frac{-b}{2a}$. De plus $2r = \frac{-b}{a}$ et $r^2 = \frac{c}{a}$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2+b+c=0$ a exactement deux solutions ou *racines* : ce sont les réels

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \textbf{ et } r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De plus $r+r' = \frac{-b}{a}$ et $r \times r' = \frac{c}{a}$.
Propriété Soit $a,b,c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$ la fonction $f(x) = ax^2+b+c$ ne s'annule jamais, elle est de signe constant et elle vérifie $f(x) = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right)$.
- Si $\Delta = 0$ la fonction $f(x) = ax^2+b+c$ ne s'annule qu'une fois, elle est de signe constant et elle vérifie $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2$.
- Si $\Delta > 0$ la fonction $f(x) = ax^2+b+c$ s'annule deux fois, elle est du signe de a à l'extérieur de $[r_1,r_2]$, elle est de signe opposé sur $]r_1,r_2[$ et elle vérifie $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$.

4.3 Inéquations

Définition Étant donnée une fonction f on peut chercher à résoudre l'*inéquation* $f(x) > 0$ (respectivement $f(x) < 0$) : c'est rechercher tous les x du domaine D_f qui vérifient $f(x) > 0$ (respectivement $f(x) < 0$).

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre des inéquations. Il y a un travail d'analyse au cas par cas qui permet de considérer des situations assez simples comme celles qui suivent.

Exemple Les solutions de $ax+b > 0$ sont les réels de $]-\frac{b}{a},+\infty)$ si $a > 0$. Ce sont les réels de $(-\infty,-\frac{b}{a}[$ si $a < 0$. Si $a = 0$ et $b > 0$ tous les réels sont solutions. En revanche si $a = 0$ et $b \leq 0$ aucun réel n'est solution.

Exemple Soit a réel non nul et α,β deux réels avec $\beta > 0$. Si $a > 0$ tous les réels sont solutions de $a((x-\alpha)^2+\beta) > 0$. En revanche si $a < 0$ aucun ne l'est.

Exemple Soit a réel non nul et $r_1 \leq r_2$ deux réels. Les solutions de $a(x-r_1)(x-r_2) > 0$ sont les réels de $(-\infty,r_1[\cup]r_2,+\infty)$ si $a > 0$. Ce sont les réels de $]r_1,r_2[$ si $a < 0$.

Exemple Soit $r_1 < ... < r_n$ des réels et a un réel non nul. Pour résoudre l'inéquation $a(x-r_1) \times ... \times (x-r_n) > 0$ il suffit d'observer que ce produit est de signe constant sur chacun des intervalles $(-\infty,r_1[$, $]r_1,r_2[$,..., $]r_{n-1},r_n[$ et $]r_n,+\infty)$, qu'il est de signes opposés sur deux intervalles successifs et qu'il est du signe de a sur $]r_n,+\infty)$.

4.4 Systèmes

Définition Résoudre un système d'équations (ou d'inéquations) revient à chercher les solutions communes à toutes les équations (ou les inéquations) du système.

Exemple Considérons le système (S) composé des inéquations $x+1 > 0$ et $4-x^2 > 0$. Les solutions de $x+1 > 0$ sont les réels de $]-1,+\infty)$ et ceux solutions de $4-x^2 > 0$ sont les réels de $]-2,2[$. Par conséquent les solutions du système (S) sont les réels de l'intersection $]-1,+\infty)\cap]-2,2[$ c'est à dire de l'intervalle $]-1,2[$.

Définition Un *système linéaire* (S) d'*inconnue* $x = (x_1,...,x_n)$ est formé d'*équations linéaires* c'est à dire d'équations du type $a_1x_1+...+a_nxn = b$ avec $a_1,...,a_n,b$ réels.

Pour résoudre ce type système linéaire deux méthodes relativement faciles à mettre en place peuvent être tentées.

La première s'appelle la *méthode par substitutions*. Elle consiste à exprimer une inconnue à partir des autres en utilisant une des équation et à remplacer dans les autres équations cette inconnue par la formule obtenue : par exemple si une des équations est $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ avec $a_1 \neq 0$ alors et il vient $x_1 = \frac{1}{a_1}(b - a_2x_2 - ... - a_nx_n)$. On répète ce calcul et on aboutit au calcul de toutes les solutions.

La seconde s'appelle la *méthode par combinaisons linéaires*. Elle consiste à faire des combinaisons linéaires d'une équation bien choisie avec les autres équations pour *éliminer* une variable de toutes les équations sauf une : par exemple si une des équations est $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ avec $a_1 \neq 0$ et si une autre équations est $A_1x_1 + ... + A_nx_n = B$ alors cette seconde équation peut être remplacée par l'équation

$$a_1(A_1x_1 + ... + A_nx_n) - A_1(a_1x_1 + ... + a_nx_n) = a_1B - A_1b$$

qui s'écrit aussi

$$(a_1A_2 - A_1a_2)x_2 + ... + (a_1A_n - A_1a_n))x_n = a_1B - A_1b$$

et qui ne contient plus la variable x_1. En itérant ce procédé on obtient un système dit *triangulaire* dont la résolution revient à celles de n équations linéaires successives du type $ax + b = 0$.

Exemple Considérons le système (S) formé des équations $2x + 3y = 17$ et $5x + 2y = 15$. Résolvons le avec la méthode par substitutions. De la première équation on tire $x = \frac{17}{2} - \frac{3}{2}y$. En remplaçant x par cette formule dans la seconde équation on obtient $\frac{17}{2}5 + (2 - \frac{3}{2}5)y = 15$ c'est à dire $(2 - \frac{3}{2}5)y = 15 - \frac{17}{2}5$ ou encore $-\frac{11}{2}y = -\frac{55}{2}$ qui donne $y = 5$. En remplaçant y par 5 dans $x = \frac{17}{2} - \frac{3}{2}y$ on obtient $x = \frac{17}{2} - \frac{3}{2}5$ c'est à dire $x = 1$. Le système (S) une unique solution. C'est le couple $(1,5)$.

Exemple Considérons toujours le système (S) formé des équations $2x + 3y = 17$ et $5x + 2y = 15$. Résolvons par combinaisons linéaires. On remplace $5x + 2y = 15$ par

$$2(5x + 2y) - 5(2x + 3y) = 2 \times 15 - 5 \times 17$$

qui donne $-11y = -55$ et donc $y = 5$. On remplace maintenant y par 5 dans la première équation qui devient $2x + 3 \times 5 = 17$ c'est à dire $2x = 2$ et donc $x = 1$. Par cette méthode on trouve fort heureusement que le système (S) admet comme une unique solution le couple $(1,5)$.

4.5 Applications

L'ensemble de ces outils théoriques sert à établir et à interpréter des représentations graphiques. Il permet aussi de mettre en équations et de résoudre des problèmes concrets comme en fourmillent les sujets de mathématiques des concours de recrutement des professeurs des écoles.

5 Dénombrement

5.1 Règles de maniement des cardinaux des ensembles finis

Les entiers naturels permettent de compter les éléments d'un ensemble. On procède de la façon suivante.

L'ensemble vide qui est noté $\emptyset$ possède 0 élément : on dit que le *cardinal* du vide est 0 (on écrit $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$). Prenons maintenant un ensemble E et un entier naturel n différent de 0. On dit que E possède n éléments ou que son *cardinal* est n (on écrit $\mathrm{Card}(E) = n$) si on peut *affecter* à chaque élément de E une étiquette numérotée avec un nombre compris entre 1 et n de telle sorte que chaque nombre compris entre 1 et n est sur l'étiquette d'un et d'un seul élément de E.

Une propriété remarquable des cardinaux est que si l'entier naturel n est le cardinal d'un ensemble E alors quelle que soit la façon d'affecter les étiquettes numéroter on trouvera toujours que le cardinal de l'ensemble E est n.

Par exemple si E est l'ensemble $E = \{a,b,c\}$ alors on peut mettre une étiquette avec un 1 à a, une étiquette avec un 2 à b et une étiquette avec un 3 à c. On en déduit que le cardinal de E est 3. On aurait eu le même résultat en mettant une étiquette avec un 1 à b, une étiquette avec un 2 à c et une étiquette avec un 3 à a.

Un ensemble E pour lequel il existe un entier naturel n tel que $\mathrm{Card}(E) = n$ est dit *fini*. Un ensemble qui n'est pas fini est dit *infini*.

Les cardinaux des ensembles finis vérifient les propriétés suivantes.

Si A et B sont deux ensembles finis alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cup B) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B), \\ \mathrm{Card}(A \setminus B) &= \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B), \\ \mathrm{Card}(A \times B) &= \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B). \end{aligned}$$

Si $p \in \mathbf{N}$ et si A est un ensemble à n éléments alors le cardinal de A^p est n^p : $\mathrm{Card}(A^p) = \mathrm{Card}(A)^p$.

5.2 Analyse combinatoire : application, injection, bijection

5.2.1 Application, injection, surjection, bijection

Définition Une *application* f d'un ensemble E appelé *ensemble de départ* de f dans un ensemble F appelé *ensemble d'arrivée* de f associe à chaque élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$.

Remarque Une fonction numérique est un cas particulier d'application. Son ensemble de départ est son domaine de définition.

Définition Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $f(x) = y$ on dit que y est l'*image* de x par f et on dit que x est un *antécédent* de y par f.

Définition Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F alors son *graphe* $\mathcal{G}(f)$ est le sous-ensemble des couples $(x, f(x))$ de $E \times F$ avec $x \in E$ quelconque.

Remarque Soit E et F deux ensembles et $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $E \times F$. Si pour tout x dans E il existe un et un seul y dans F tel que $(x,y) \in \mathcal{G}$ alors $\mathcal{G}$ est le graphe d'une fonction f de E dans F.

Définition Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est *injective* si quels que soient x et x' dans E l'égalité $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$. Autrement dit, deux éléments distincts de E ont des images différentes par f. Ceci signifie aussi que tout élément de F possède au plus un antécédent par f.

Définition Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est *surjective* si quel que soit y dans F il existe x dans E tel que $f(x) = y$. Autrement dit, tout élément de F admet au moins un antécédent x par f.

Définition Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est *bijective* si quel que soit y dans F il existe un et un seul x dans E tel que $f(x) = y$. Autrement dit, tout élément de F admet exactement un antécédent x par f. Autrement dit f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Si une application est injective (respectivement surjective, bijective) on dit que c'est une *injection* (respectivement *injection*, *injection*).

Définition Deux ensembles finis ou infinis on *même cardinal* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Remarque Lorsque les ensembles sont finis cette définition d'avoir même cardinal est en accord avec la définition déjà donnée du cardinal d'un ensemble fini.

Propriété Si E est un ensemble alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est "strictement plus grand" que l'ensemble E lui-même dans le sens suivant : il n'existe pas de surjection f de E dans $\mathcal{P}(E)$. Pour établir ceci il suffit de considérer une application f de E dans $\mathcal{P}(E)$ et de montrer qu'elle n'est pas une surjection. Soit donc f une telle application. Considérons alors le sous-ensemble F de E formé des éléments x de E tels que $x \notin f(x)$. Alors il n'existe aucun $x \in E$ tel que $f(x) = F$ et donc f n'est pas une surjection : en effet s'il existait un tel x alors par définition de F, soit $x \in F$, ce qui entraînerait $x \notin f(x) = F$ qui est contradictoire, soit $x \notin F = f(x)$, ce qui entraînerait, par définition de F, $x \in F$ qui est contradictoire. Puisque F n'a pas d'antécédent par f, cette application n'est pas une surjection.

5.2.2 Analyse combinatoire

Propriété Si n et p sont des entiers naturels alors le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est égal n^p.

Définition On appelle *arrangement* une liste ordonnée d'un ensemble fini.

Propriété Si n et p sont des entiers naturels alors le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements à p éléments c'est à dire à l'entier A_n^p égal à $A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$.

Propriété Si n est un entier naturel alors le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements à n éléments d'un ensemble à n éléments c'est à dire *factorielle n* (le nombre *factorielle n* est noté $n!$ et il vérifie $n! = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot 2 \cdot 1$).

Propriété Si $n \in \mathbf{N}$ le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.

Propriété Si $n \in \mathbf{N}$ le nombre de façon d'ordonner les éléments d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Définition On appelle *combinaison* un sous-ensemble d'un ensemble fini.

Propriété Si n et p sont des entiers naturels tels que $p \leq n$ alors le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments, c'est à dire le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Ce nombre est noté $\binom{n}{p}$ (et anciennement C_n^p) et il est appelé *p parmi n*. On parle aussi de *coefficient binomial*.

Exemple Le nombre de mains de 5 cartes possibles issues d'un jeu de 32 cartes est donc $M = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!27!}$ c'est à dire $M = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}$ et donc $M = 201376$.

Exemple Une application strictement croissante de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$ est uniquement déterminer par le choix de p nombres distincts de $\{1,...,n\}$ c'est à dire par le choix d'un sous-ensemble à p éléments de $\{1,...,n\}$ qui est un ensemble à n éléments. On en déduit que le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$ est égal au nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments qui est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Propriété $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exemple Il y a autant de *singletons* (sous-ensemble formé d'un élément) que de sous-ensembles à $n-1$ éléments dans un ensemble de cardinal égal à n.

Propriété Si n et p sont des entiers naturels tels que $p < n$ alors

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

c'est à dire

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Ce résultat permet de calculer de proche en proche les coefficients $\binom{n}{p}$ en dressant un triangle infini dont voici les premiers termes (triangle de Pascal) :

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Exemple On déduit de ce triangle qu'un ensemble à 5 éléments contient 1 sous-ensemble à 0 éléments (le vide), 5 sous-ensembles à 1 élément, 10 sous-ensembles à 2 éléments, 10 sous-ensembles à 3 éléments, 5 sous-ensembles à 4 éléments et 1 sous-ensemble à 5 éléments (lui-même).

Propriété Les coefficients binomiaux interviennent dans le calcul de $(a+b)^n$ de la façon suivante (formule du binôme de Newton) :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + ... + \binom{n}{p}a^p b^{n-p} + ... + nab^{n-1} + b^n.$$

Propriété Si $n \in \mathbf{N}$ alors $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{p} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

On peut obtenir ce résultat de deux façons. La première consiste à dire que les 2^n sous-ensembles d'un ensemble à n éléments se répartissent en $\binom{n}{0}$ sous-ensembles à 0 élément, $\binom{n}{1}$ sous-ensembles à 1 élément,...,$\binom{n}{p}$ sous-ensembles à p éléments,...,$\binom{n}{n-1}$ sous-ensembles à $n-1$ éléments et $\binom{n}{n}$ sous-ensembles à n éléments. Le seconde consiste à appliquer la formule du binôme à $2^n = (1+1)^n$.

Exemple Calculons le nombre de mains de 5 cartes possibles issues d'un jeu de 32 cartes et contenant exactement une paire et trois autres cartes de niveaux différents. Un jeu de 32 carte contient des cartes regroupées en 8 niveaux et 4 cartes par niveau. Une main qui répond à la description compte des cartes de 4 niveaux différents, le niveau qui correspond à la paire et trois niveaux pour chacun desquels il y a une seule carte. Pour constituer une telle main on choisit d'abord 1 niveau parmi 8 (8 choix possibles car $8 = \binom{8}{1}$), pour ce niveau on choisit 2 cartes parmi 4 (6 choix possibles car $6 = \binom{4}{2}$), puis on choisit 3 niveaux parmi les 7 restants (35 choix car $35 = \binom{7}{3}$) et pour chacun des 3 niveaux on choisit 1 carte parmi 4 (4 choix possibles car $4 = \binom{4}{1}$). Le nombre de mains répondant à la description est donc $N = 8 \times 6 \times 140 \times 4^3$ c'est à dire $N = 107520$.

6 Probabilités et statistique

6.1 Expérience aléatoire

L'objet fondamental des probabilités est *l'expérience aléatoire* c'est à dire une expérience qui a plusieurs issues possibles mais qui sont incertaines. Pour tenter de comprendre une expérience aléatoire, on lui associe un modèle mathématique appelé *espace probabilisé*. Le choix de ce modèle est délicat et il faut toujours avoir en tête que ce n'est qu'un modèle, une vue de l'esprit, mais pas la réalité.

Avant de donner la définition mathématique des espaces probabilisés décrivons trois expériences aléatoires.

Le jeu de pile ou face repose sur le principe suivant. Lorsqu'on lance la pièce on ne sait pas si c'est pile ou face qui sera visible et chacun des deux a autant de chances d'apparaître : pile et face ont chacun une chance sur deux de tomber. On a évidemment une chance sur une de voir pile ou face.

Le lancer d'un dé repose sur un principe similaire. Les six faces du dé ont autant de chances d'apparaître, une chance sur six chacune. En lançant le dé on a bien sûr six chances sur six de sortir un chiffre entre 1 et 6. Puisque trois faces du dé portent un numéro pair et les trois autres portent un numéro impair on admet que la chance de sortir un numéro pair en lançant le dé est de trois fois une chance sur six c'est à dire une chance sur deux.

Considérons maintenant un mètre gradué de 0 à 100 cm. On sectionne ce mètre au hasard. On admet facilement qu'on a trois chances sur dix de le sectionner avant la graduation 30 cm, qu'on a une chance sur dix de le sectionner après la graduation 90 cm, et qu'on a quinze chances sur cent de le sectionner sur la portion comprise entre la graduation 45 cm et la graduation 60 cm.

Lancer la pièce, lancer le dé ou sectionner au hasard le mètre constituent des *expériences aléatoires*. Les ensemble $\{$pile, face$\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$ et $[0$ cm, 100 cm$]$ sont les ensembles des *issues*, *épreuves* ou *événements élémentaires* associés à ces expériences aléatoires. *Pile tombe*, *4 sort*, *on sectionne à 17,3 cm* sont des *événements élémentaires* alors que *un nombre pair sort* ou *on sectionne sur la portion comprise entre la graduation 45 cm et la graduation 60 cm* sont appelés *événements* associés à ces expériences. à chaque événement on a associé un nombre, sa chance d'arriver, qui est compris entre 0 et 1. Ce nombre s'appelle la *probabilité* de l'événement. On a ainsi muni l'ensemble des issues d'une *probabilité*. On parle alors d'*espace probabilisé*.

Certains événements sont disjoints (on dit *incompatibles*). C'est le cas d'événements élémentaires associés à une même expérience aléatoire. C'est aussi le cas de *sortir un numéro supérieur ou égal à 5* et *sortir un numéro inférieur ou égal à 2* dans l'expérience du lancer d'un dé. C'est encore le cas de *sectionner le mètre avant la graduation 30 cm* et de *sectionner le mètre après la graduation 90 cm*. Lorsque les événements étaient disjoints leurs chances ou leurs probabilités s'additionnent.

Donnons maintenant une définition mathématique des objets associés à une expérience aléatoire.

6.2 Probabilités, probabilités discrètes et continues

Définition On appelle *espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ la donnée d'un ensemble Ω, d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω et d'une application p de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ qui vérifient les propriétés suivantes :

— $\Omega \in \mathcal{F}$ et $p(\Omega) = 1$

— Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

— Si $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ alors la réunion des A_i est dans $\mathcal{F}$

— Si $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints alors

$$p(A_1 \cup ... \cup A_n \cup ...) = p(A_1) + ... + p(A_n) + ...$$

L'ensemble Ω est appelé *univers* et ses éléments *issues*, *épreuves* ou *événements élémentaires*. Les éléments de $\mathcal{F}$ s'appellent les *événements* et l'application p est une *probabilité*.Si A est un événement l'événement $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est l'événement *complémentaire*. Deux événements A et B sont dits *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, ils sont *incompatibles* s'ils sont d'intersection vide (disjoints) et ils sont dits *équiprobables* si $p(A) = p(B)$. Un événement de probabilité 1 est dit *certain*. C'est le cas de Ω. Un événement de probabilité nulle est est dit *impossible*. C'est le cas de l'événement vide $\emptyset$. Si Ω est fini ou dénombrable on parle de *probabilité discrète* et sinon de *probabilité continue*.

Exemples Dans l'expérience de lancer du dé, les événements *un nombre pair sort* et *un nombre impair sort* ne sont pas indépendants. En effet la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{3}$ alors que la probabilité de sortir un nombre qui est pair et impair à la fois est nulle. En revanche les événements *un nombre pair sort* (de probabilité $\frac{1}{2}$) et *sortir un numéro supérieur ou égal à 5* (de probabilité $\frac{1}{3}$) sont indépendants car la probabilité de sortir un numéro pair supérieur ou égal à 5 est $\frac{1}{6}$ qui est égal à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Exemple Soit n un entier naturel non nul. On pose $\Omega = \{1, ..., n\}$, on note $\mathcal{F}$ la famille de tous les sous-ensembles de Ω et on considère la probabilité p définie par $p(k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \Omega$. Cette probabilité est la *probabilité uniforme sur* Ω. Si A est un sous-ensemble de Ω alors

$$p(A) = \frac{\text{Cardinal de } A}{n}.$$

Cet exemple est la généralisation du jeu de pile ou face ($n=2$) et du lancer d'un dé ($n=6$).

Exemple La probabilité uniforme sur un ensemble fini permet de modéliser le tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes et affirme qu'on a une chance sur huit de tirer un as au hasard. Elle permet aussi de montrer que la probabilité d'avoir une main de 5 cartes avec exactement une paire et trois autres cartes de niveaux différents lorsque cette main est tirée au hasard d'un jeu de 32 carte est $p=\frac{107520}{201376}$ ce qui donne environ $0,5339$ car le nombre de mains de 5 cartes possibles issues d'un jeu de 32 cartes est $M=201376$ et le nombre de mains de 5 cartes possibles issues d'un jeu de 32 cartes et contenant exactement une paire et trois autres cartes de niveaux différents est $N=107520$.

Exemple Modélisons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux pièces indiscernables et à regarder le tirage obtenu. Il y a trois issues possibles *obtenir deux piles* (I_{pp}), *obtenir deux faces* (I_{ff}) et *obtenir un pile et un face* (I_{fp}). Il est faux de penser que les trois événements sont équiprobables. En effet si maintenant on marque l'une des pièces on constate que l'événement *obtenir un pile et un face* (I_{fp}) peut être décomposé en deux événements disjoints *on obtient pile avec la pièce marquée et face avec l'autre* et *on obtient face avec la pièce marquée et pile avec l'autre*. On conclut alors que $p(I_{pp})=p(I_{ff})=\frac{1}{4}$ et $p(I_{pf})=\frac{1}{2}$. Une expérience équivalente au lancer de deux pièces dont l'une est marquée est de lancer deux fois la même pièce. Si on remplace pile et face par garçon et fille on conclut qu'une fratrie de deux enfants possède une chance sur deux d'être formée d'un garçon et d'une fille, une chance sur quatre de deux filles et une chance sur quatre de deux garçons.

Exemple Un joueur obstiné décide de lancer un dé jusqu'au premier six. C'est une expérience aléatoire qui est modélisée par un espace probabilisé qui n'est plus fini mais dénombrable. à tout entier naturel non nul n est associé l'événement élémentaire *on fait $n-1$ lancers qui ne donnent pas un six puis un lancer qui donne un six* (A_n). Puisque l'issue d'un lancer est indépendant du passé on en déduit que la probabilité de cet événement est $p(A_n)=\frac{5^{n-1}}{6^n}$.

Exemple Ici Ω est un segment $[a,b]$. La *probabilité uniforme sur* Ω est la probabilité qui à tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans $[a,b]$ associe $p([\alpha,\beta])=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$. On admet l'existence de cette probabilité. La preuve rigoureuse est due à Borel et Lebesgue au début du XX^e siècle. Cette probabilité permet de modéliser l'expérience du mètre sectionné.

Exemple On lance une fléchette au hasard dans une cible de rayon 1. Si $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ la probabilité pour que la fléchette tombe à une distance comprise entre α et β est proportionnelle à l'aire de cette zone et vaut $\beta^2-\alpha^2$.

6.3 Probabilités conditionnelles (formule de Bayes)

Définition Soit $(\Omega,\mathcal{F},p)$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{F}$ tel que $p(A)>0$. La *probabilité conditionnelle sachant* A est la probabilité définie par

$$p_A(B)=p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}.$$

Exemple La probabilité qu'une personne titulaire d'un diplôme D ait étudié l'option O sachant qu'elle vient de la formation F est $p_F(O)=0,4$ et la probabilité qu'elle vienne de la formation F est $p(F)=0,8$. Par conséquent la probabilité qu'elle ait étudié l'option O et qu'elle vienne de la formation F est $p(O\cap F)=0,4\times0,8=0,32$.

Exemple Lorsqu'on sectionne un mètre au hasard, en admettant que la probabilité que la section soit réalisée sur une portion donnée est proportionnelle à la longueur de cette portion, la probabilité de sectionner le mètre avant la graduation 14 cm (événement B) sachant qu'il est sectionné entre la graduation 5 cm et la graduation 95 cm (événement A) est $p_A(B)=0,1$ car $p(A\cap B)=0,09$ et $p(A)=0,9$.

Proposition Si $A_1,...,A_n \in \mathcal{F}$ alors

$$p(A_1 \cap ... \cap A_n) = p(A_1)p(A_2/A_1)...p(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Exemple L'exemple du joueur obstiné pouvait être traité à l'aide de probabilités conditionnelles et de la formule ci-dessus. Si le joueur obstiné fait un six seulement au lancé n alors l'événement A_k avec $k = 1,...,n-1$ correspond à ne pas faire six au lancer k et comme A_k est indépendant des précédent $p(A_k/A_1 \cap ... \cap A_{k-1}) = \frac{5}{6}$. L'événement A_n correspond à faire six au lancer n et comme A_n est indépendant des précédent $p(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) = \frac{1}{6}$. C'est pourquoi d'après la formule précédente $p(A_n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.

Proposition (*Formule de Bayes*) Soit A et B deux événements tels que $p(A) > 0$ et $p(B) > 0$.
1) On suppose connaître $p(A)$, $p(B)$ et $p_A(B)$. Alors la probabilité $p_B(A)$ vérifie

$$p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p(B)}.$$

2) On suppose connaître $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(B)$. Alors la probabilité $p_B(A)$ vérifie

$$p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times (1 - p(A))}.$$

Exemple Dans un jeu de cartes, on considère les événements "avoir un as de pique au début" (événement A) et "gagner avec un bonus" (événement B). On suppose $p(A) = 0,25$, $p_A(B) = 0,3$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0,2$. D'après la formule de Bayes la probabilité $p_B(A)$ d'avoir eu un as de pique au début sachant qu'on a gagné avec un bonus est $p_B(A) = \frac{0,3 \times 0,25}{0,3 \times 0,25 + 0,2 \times (1 - 0,25)} = \frac{1}{3} = 0,333$.

6.4 Premiers éléments de statistique descriptive

Cette partie est un complément au programme.

En statistique on distingue deux grands types de données, les *données quantitatives* qui représentent des grandeurs mesurables (des relevés de poids, de température, de prix) et les *données qualitatives* (des listes de couleurs, de catégories professionnelles, de bulletins de vote, des menus journaliers, des défauts de fabrication d'une chaîne de montage). Ces suites de données s'appellent des *séries statistiques*.

Dans les deux situations (quantitatif ou qualitatif), on associe à une *population* d'*individus* une *variable* ou *caractère*. Les individus de la population étudiée seront numérotés par un entier. Ainsi x_i représentera la valeur du caractère de l'individu portant le numéro i. Si la population est composée de n individus alors $x = (x_1,...,x_n)$ est la série statistique associée au caractère étudié. L'*effectif* est le nombre d'individus qui forment la population.

6.4.1 Données quantitatives

Définitions Soit $x = (x_1,...,x_n)$ une suite de données quantitatives. L'*étendue* est la différence des valeurs extrêmes. Pour $x \in \mathbf{R}$ l'*effectif cumulé de* x est le cardinal $k(x) = \mathrm{Card}(\{i, x_i \leq x\})$ et la *fréquence cumulée* $F(x)$ est $F(x) = \frac{k(x)}{n}$. La *médiane* x_{med} divise les données en deux parties égales, celles qui lui sont plus petites et celles qui lui sont plus grandes. On a $F(x_{med}) = 1/2$. On définit aussi les trois *quartiles* $q_1, q_2 = x_{med}$ et q_3 par $F(q_i) = \frac{i}{4}$. La *moyenne* $\overline{x}$ *de* x est

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n).$$

On appelle *variance empirique* le nombre positif $v=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ qui est égal à $\overline{x^2}-\bar{x}^2$ où $\overline{x^2}$ désigne la moyenne de la suite des carrés : $x^2=(x_1^2,...,x_n^2)$ et $\overline{x^2}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\dfrac{1}{n}(x_1^2+...+x_n^2)$.

L'*écart-type* est $\sigma=\sqrt{v}$. Le *coefficient de variation* est le rapport $\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$.

Remarque Le médiane est bien moins sensible que la moyenne aux variations des valeurs extrêmes.

Remarque La variance, l'écart-type et le coefficient de variation mesurent comme la population se disperse par rapport à la moyenne.

Remarque Si, au lieu de donner la valeur x_i du caractère de chaque individu i on donne pour chaque valeur c_j prise par le caractère le nombre n_j d'invidus alors on définit la *fréquence* de la valeur c_j par $f_j=\frac{n_j}{n}$ et la *fréquence cumulée* F_j de c_j comme la somme des fréquences des caractères inférieurs ou égaux à c_j. La moyenne $\bar{x}$ se calcule par la formule

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d}n_jc_j=\frac{1}{n}(n_1c_1+...+n_dc_d)=f_1c_1+...+f_dc_d$$

où d est le nombre de valeurs différentes prises par le caractère. La variance empirique est donnée par les formules

$$v=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d}n_j(c_j-\bar{x})^2=\sum_{j=1}^{d}f_j(c_j-\bar{x})^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d}n_jc_j^2\right)-\bar{x}^2=\left(\sum_{j=1}^{d}f_jc_j^2\right)-\bar{x}^2.$$

En pratique on utilise les formules avec les c_i.

Remarque On divise souvent l'étendue en intervalles appelés *classes*. On peut s'intéresser à l'effectif n_j, à l'effectif cumulé N_j, à la fréquence f_j et à la fréquence cumulée F_j d'une classe $[a_j,a_{j+1}[$ (ou $]a_j,a_{j+1}]$.) L'effectif cumulé est égal à $n_1+...+n_j$. La fréquence f_j est égale à $\frac{n_j}{n}$, la fréquence cumulée F_j est la somme $f_1+...+f_j$. On calcule la moyenne et la variance en utilisant les formules précédentes avec pour n_j l'effectif de la classe et $c_j=\frac{a_j+a_{j+1}}{2}$. Pour calculer avec précision la médiane on repère d'abord la classe médiane. C'est la classe dont la fréquence cummulée $F_{j_{med}}$ est la première à passer $\frac{1}{2}$. On calcule alors x_{med} par interpolation linéaire en posant

$$x_{med}=a_{j_{med}}+\left(\frac{a_{j_{med}+1}-a_{j_{med}}}{F_{j_{med}}-F_{j_{med}-1}}\right)(\frac{1}{2}-F_{j_{med}-1}).$$

On fait de même pour les quartiles en remplaçant $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$.

Définitions Soit $(x,y)=((x_1,y_1),...,(x_n,y_n))$ une suite de données quantitatives couplées. La *covariance* est

$$cov(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=v(xy)-v(x)v(y).$$

Le *coefficient de corrélation* est le rapport $r=\dfrac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}\in[-1,1]$.

Proposition Parmi les droites affines $Y=aX+b$, celle qui minimise le nombre

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

est la droite appelée *droite de régression linéaire*. Elle passe par $(\bar{x},\bar{y})$ et sa représentation paramétrique est

$$X\mapsto Y=[\bar{y}-\frac{cov(x,y)}{v(x)}\bar{x}]+\frac{cov(x,y)}{v(x)}X.$$

Proposition Le coefficient de corrélation est égal à 1 ou -1 si et seulement si les (x_i, y_i) sont sur la droite de régression linéaire. Les séries statistiques sont d'autant plus corrélées linéairement que le coefficient de corrélation est proche de 1 ou -1.

6.4.2 Données qualitatives

Les données qualitatives peuvent parfois s'ordonner (classement) mais elles ne s'additionnent jamais. Elles nécessitent un traitement qui diffère de celui des données quantitatives.

Définitions Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ une suite de données qualitatives (la *variable* ou le *caractère*) à valeurs dans un ensemble $\{c_1, ..., c_d\}$ dont les éléments sont appelés *modalités* Pour chaque $j \in \{1, ..., d\}$ on appelle *effectif* de la modalité c_j le nombre n_j de i tel que $x_i = c_j$ et on appelle *fréquence* de la modalité c_j le rapport (positif) $f_j = \frac{n_j}{n}$. On a

$$n_1 + ... + n_d = n \text{ et } f_1 + ... + f_d = 1.$$

Le *mode* est la modalité de fréquence (ou d'effectif) la plus élevée.

6.4.3 Représentation de séries statistiques

On représente habituellement une série statistique à l'aide d'un tableau, d'un histogramme, d'une courbe ou d'un nuage de points.