

Licence Sciences et Professorat des écoles

Troisième année

Université de Rennes 1

Mathématiques 2

Solutions d'exercices

Lien vers le [programme](#)

Lien vers le [memento](#)

Lien vers le [résumé des séances 2020-2021](#)

Liens vers les feuilles [1](#), [2](#), [3](#), [4](#), [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [9](#), [10](#), [11](#) et [12](#)

Lien vers les [solutions de certains exercices](#)

Lien vers le [sujet du contrôle continu 1 \(2019-2020\)](#)

Lien vers le [sujet du contrôle continu 2 \(2019-2020\)](#)

Lien vers le [sujet du contrôle continu 1 \(2020-2021\)](#)

Lien vers le [sujet du contrôle continu 2 \(2020-2021\)](#)

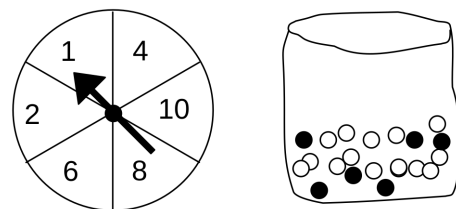
Lien vers le [sujet du contrôle continu 3 \(2020-2021\)](#)

Les solutions qui suivent sont très détaillées afin d'apporter toutes les explications nécessaires à la compréhension des réponses apportées. Il ne s'agit donc pas de solutions types attendues dans une épreuve de contrôle ou de concours. En situation d'évaluation, les réponses peuvent être plus concises.

Solution de l'exercice 1 du recto de la feuille 1 et extrait du sujet 0 2013

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, si la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une bille dans un sac.

La roulette et le sac sont représentés ci-contre.



Les prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois. Quelle est la probabilité que Suzy gagne un prix ?

La roulette est divisée en six secteurs de même ouverture angulaire et cinq d'entre eux portent un numéro pair alors qu'un seul porte un numéro impair. On va donc supposer qu'on est dans une situation d'équiprobabilité et que la probabilité de tomber sur un secteur donné est indépendante du secteur. Par conséquent lorsqu'on fait tourner la roulette la probabilité de tomber sur un numéro pair est donc de $p(P) = \frac{5}{6}$ où P désigne l'événement "tomber sur un numéro pair en ayant fait tourner la roulette" (on fait le quotient entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles).

Le sac de billes compte vingt billes dont six noires et quatorze blanches. On suppose donc que, lorsqu'on tire une bille au hasard dans le sac, la probabilité de tirer une bille donnée ne dépend pas de la bille. C'est encore une situation d'équiprobabilité. Aussi sachant que la roulette est tombée sur un numéro pair, la probabilité de tirer une bille noire dans le sac est $p_P(N) = \frac{6}{20}$ où N désigne l'événement "tirer une bille noire" et donc $p_P(N)$ est la probabilité conditionnelle de tirer une bille noire sachant que la roulette est tombée sur un numéro pair.

La probabilité $p(N)$ de tirer une bille noire est donc égale, d'après la définition de la probabilité conditionnelle, $p(N) = p(P) \times p_P(N)$, c'est à dire $p(N) = \frac{5}{6} \times \frac{6}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$.

(Remarque. Il aurait été possible d'obtenir le même résultat en faisant un arbre qui décrit l'expérience.)

Solution de l'exercice 2 du recto de la feuille 1 et extrait du sujet 0 2013

Lors d'un tournoi de Bowling, on note les résultats des 15 joueurs :

268 220 167 211 266 152 270 279 192 191 164 229 223 222 246.

Le nombre maximal de point réalisable par un joueur est 300.

Quel résultat peut-on supprimer sans modifier la moyenne des résultats ?

La moyenne M des résultats est égale à la somme des résultats divisée par leur nombre :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{15} \times (268+220+167+211+266+152+270+279+192+191+164+229+223+222+246) \\ &= \frac{3300}{15} \\ &= 220. \end{aligned}$$

En supprimant le score qui correspond à cette moyenne c'est à dire 220 on ne change pas la moyenne, plus exactement, la nouvelle moyenne M' des 14 scores restant vaut encore 220.

En effet si on note S la somme des 15 scores et S' la somme des 14 scores autres que 220 qui vaut M , on a $S = 15 \times M$ et $S' = S - 220 = S - M$. Donc

$$M' = \frac{1}{14} \times S' = \frac{1}{14} \times (S - M) = \frac{1}{14} \times (15 \times M - M) = \frac{1}{14} \times (14 \times M) = M.$$

Solution de l'exercice 3 du recto de la feuille 1 et extrait du sujet 0 2013

La longueur officielle d'un marathon est 42,195 km. Lors d'un marathon un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après 5 km de course, elle lui indique qu'il court depuis 17 minutes et 30 secondes.

1. Le coureur pense que s'il gardait cette allure tout au long de la course, il mettrait moins de 2h30 en tout. A-t-il raison ?

Dans cet exercice on utilise le fait que la distance d parcourue pendant un déplacement d'une durée de t à la vitesse constante v est de $d = v \times t$: la distance parcourue est proportionnelle au temps de parcours et à la vitesse.

Dans un premier temps on calcule la vitesse v pendant un tel marathon. Sachant qu'à cette vitesse on parcourt 5 km en 17 minutes et 30 secondes c'est à dire en 17,5 minutes il vient $5 = v \times 17,5$ et donc $v = \frac{5}{17,5}$ km/min.

À cette vitesse la durée t pour courir un tel marathon est donnée par la relation $42,195 = \frac{5}{17,5}t$ puisque la distance d'un marathon est $d = 42,195$ km. Ainsi $t = 42,195 \times \frac{17,5}{5}$ minutes : la durée d'un marathon est de 147,68 minutes (qui correspondent à 148 minutes) et donc inférieure à 2h28 s'il est couru à la vitesse indiquée. Le coureur a donc raison de penser qu'à cette vitesse il mettrait moins de 2h30.

2. En réalité la vitesse moyenne du coureur pendant les vingt premiers kilomètres a été 16 km/h et cette vitesse a chuté de 10% pour le restant du parcours. Quel a été son temps de parcours ? Donner la réponse en heures, minutes, secondes, centièmes de seconde (le cas échéant).

On décompose le parcours en deux parties. Pendant la première partie d'une durée t_1 le coureur parcourt une distance $d_1 = 20$ km à la vitesse $v_1 = 16$ km/h. Pendant la seconde partie d'une durée t_2 le coureur parcourt une distance d_2 à la vitesse v_2 .

Puisque $d_1 = v_1 \times t_1$ il vient que $t_1 = \frac{20}{16} = 1,25$ heures c'est à dire 75 minutes ou encore $t_1 = 4500$ secondes.

La distance parcourue pendant le marathon est $d = 42,195$ km et elle vérifie $d = d_1 + d_2$. Ainsi $d_2 = d - d_1$ c'est à dire $d_2 = 42,195 - 20 = 22,195$ km.

La vitesse v_2 est, d'après l'énoncé, inférieure de 10% à la vitesse v_1 , c'est à dire $v_2 = (1 - 10\%) \times v_1$ où encore $v_2 = (1 - 0,1) \times v_1 = 0,9 \times v_1$. Puisque $v_1 = 16$ km/h il vient $v_2 = 0,9 \times 16 = 14,6$ km/h.

La durée t_2 de la seconde partie du parcours vérifie $d_2 = v_2 \times t_2$ c'est à dire $22,195 = 14,6 \times t_2$. Il vient $t_2 = \frac{22,195}{14,6}$ heures ou $t_2 = \frac{22,195}{14,6} \times 3600$ secondes c'est à dire $t_2 = 5548,75$ secondes.

La durée t du marathon est $t = t_1 + t_2$ c'est à dire $t = 10048,75$ secondes.

Pour avoir cette durée en heures, minutes, secondes, centièmes on observe que

$$\begin{aligned} t &= 10048,75 \text{ secondes} \\ &= 167 \times 60 + 28,75 \text{ secondes} \\ &= 2 \times 60 \times 60 + 47 \times 60 + 28,75 \text{ secondes} \\ &= 2 \text{ heures } 47 \text{ minutes } 28 \text{ secondes } 75 \text{ centièmes.} \end{aligned}$$

Le marathon est couru en 2 heures 47 minutes 28 secondes et 75 centièmes.

Solution de l'exercice 1 du verso de la feuille 1 et extrait du sujet 1 2014

Le cross du collège a eu lieu. 200 élèves de troisième ont franchi la ligne d'arrivée.

Voici les indicateurs des performances réalisées en minutes.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Moyenne	Étendue
12,5	14,8	15,7	16,3	15,4	4,2

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. Quelle est la performance en minutes du dernier arrivé ?

On connaît la performance t_{\min} de la personne la plus rapide, 12,4 minutes. On connaît l'étendue e qui est de 3,2 minutes. L'étendue est aussi la différence entre la performance t_{\max} de la personne la moins rapide et la performance t_{\min} de la personne la plus rapide : $e = t_{\max} - t_{\min}$. Par conséquent

$t_{\max} = t_{\min} + e$ c'est à dire $t_{200} = 12,4 + 4,2 = 16,6$ minutes. La performance du dernier arrivé est donc de 16,6 minutes c'est à dire de 16 minutes et 36 secondes.

2. Quelle est la somme des 200 performances en minutes ?

La moyenne des performances $m = 15,4$ minutes est égale à la somme S des performances des 200 participants divisée par le nombre $N = 200$ de participants : $m = \frac{S}{N}$ ou encore $15,4 = \frac{S}{200}$. Par conséquent la somme S des performances des 200 participants vaut $S = Nm$ c'est à dire $S = 200 \times 15,4 = 3080$ minutes.

3. Ariane est arrivée treizième. Donner l'encadrement le plus précis possible de sa performance en minutes.

Puisque 200 élèves ont participé au cross et que $50 = \frac{200}{4}$, le premier quartile est la cinquantième performance. Puisque Ariane est arrivée treizième, sa performance se situe entre le temps minimum qui est de 12,4 minutes et le premier quartile qui est de 14,8 minutes. L'encadrement en minutes le plus précis de la performance d'Ariane est donc l'intervalle [12 minutes, 15 minutes] en arrondissant à la minute par défaut le meilleur temps et par excès le temps du premier quartile.

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Affirmation : Plus de 50% des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen.

Puisque la médiane est de 15,7 minutes, 50% des élèves c'est à dire 100 élèves sur les 200 ont dépassé ce temps et au moins élève, celui qui réalise la centième performance a réalisé cette performance. Il y a donc au moins 101 élèves qui réalisent un temps supérieur ou égal à 15,7 minutes. Or le temps moyen qui est de 15,4 minutes est strictement inférieur à ce temps médian. Il y a donc au moins 101 élèves c'est à dire plus 50% des élèves qui ont mis un temps strictement supérieur au temps moyen qui est 15,4 minutes.

Solution de l'exercice 2 du verso de la feuille 1 et extrait du sujet 1 2014

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Affirmation 1 : La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.

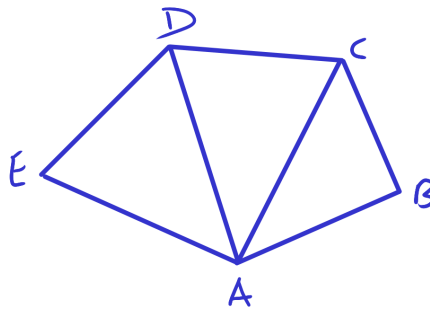
Si n est un entier alors la somme S des cinq entiers consécutifs dont le premier est n vaut

$$\begin{aligned} S &= n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) \\ &= 5n + (1+2+3+4) \\ &= 5n + 5 \times 2 \\ &= 5 \times (n+2). \end{aligned}$$

Par conséquent la somme S est égale à 5 fois le troisième des cinq entiers consécutif. C'est bien un multiple de 5. L'affirmation est vraie.

2. Affirmation 2 : La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540° .

Considérons un pentagone convexe dont les sommets successifs sont A, B, C, D et E . Puisque le pentagone est convexe, les segments $[A, C]$ et $[A, D]$ sont dans le pentagone. On peut donc décomposer ce pentagone convexe en trois triangles (A, B, C) , (A, C, D) et (A, D, E) .



On a

$$\begin{aligned} (\widehat{AB, AE}) &= (\widehat{AB, AC}) + (\widehat{AC, AD}) + (\widehat{AD, AE}) \\ (\widehat{CD, CB}) &= (\widehat{CD, CA}) + (\widehat{CA, CB}) \\ (\widehat{DE, DC}) &= (\widehat{DE, DA}) + (\widehat{DA, DC}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= (\widehat{AB, AE}) + (\widehat{BC, BA}) + (\widehat{CD, CB}) + (\widehat{DE, DC}) + (\widehat{EA, ED}) \\ &= ((\widehat{AB, AC}) + (\widehat{AC, AD}) + (\widehat{AD, AE})) \\ &\quad + (\widehat{BC, BA}) \\ &\quad + ((\widehat{CD, CA}) + (\widehat{CA, CB})) \\ &\quad + ((\widehat{DE, DA}) + (\widehat{DA, DC})) \\ &\quad + (\widehat{EA, ED}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} S &= ((\widehat{AB, AE})(\widehat{BC, BA}) + (\widehat{CD, CB}) + (\widehat{DE, DC}) + (\widehat{EA, ED})) \\ &= ((\widehat{AB, AC}) + (\widehat{BC, BA}) + (\widehat{CA, CB})) \\ &\quad + ((\widehat{CD, CA}) + (\widehat{AC, AD}) + (\widehat{DA, DC})) \\ &\quad + ((\widehat{AD, AE}) + (\widehat{DE, DA}) + (\widehat{EA, ED})). \end{aligned}$$

La somme des angles du pentagone est donc égale à la somme des angles des trois triangles (A, B, C) , (A, C, D) et (A, D, E) . Elle vaut donc $3 \times 180^\circ$, c'est à dire 570° puisque la somme des angles d'un triangle vaut 180° . L'affirmation est vraie.

3. On dispose du plan d'une maison à l'échelle 1/50.

Affirmation 3 : Les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles.

Dire que l'échelle est 1/50 signifie que les distances sur le plan sont 50 fois plus petites que les distances réelles et donc les surfaces du plan sont $50^2 = 2500$ fois plus petites que les surfaces réelles. L'affirmation est donc fausse. Par exemple une pièce carrée de 5 m de côté et donc de 25 m^2 est représenté sur le plan par un carré de $\frac{1}{50} \times 5 = 0,1$ m de côté et donc de $0,1^2 = 0,001 \text{ m}^2$ de surface et ceci correspond à une surface 2500 fois plus petite que les 25 m^2 de la pièce.

4. Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives.

Affirmation 4 : Elle terminera un dimanche soir.

On suppose que Shéhérazade ne lit que le soir mais pas toute la nuit. Si elle ne lit qu'un soir, elle

termine le premier soir de lecture, c'est à dire un lundi soir. Si elle lit 7 soir elle termine le septième soir, c'est à dire un dimanche soir. Si elle lit $7 \times n$ soirs elle va terminer un dimanche soir. Or $1001 = 7 \times 143$. Par conséquent si Shéhérazade lit 1001 soirs elle lit $7 \times n$ soirs avec $n = 143$ et donc elle terminera un dimanche soir. L'affirmation est donc vraie.

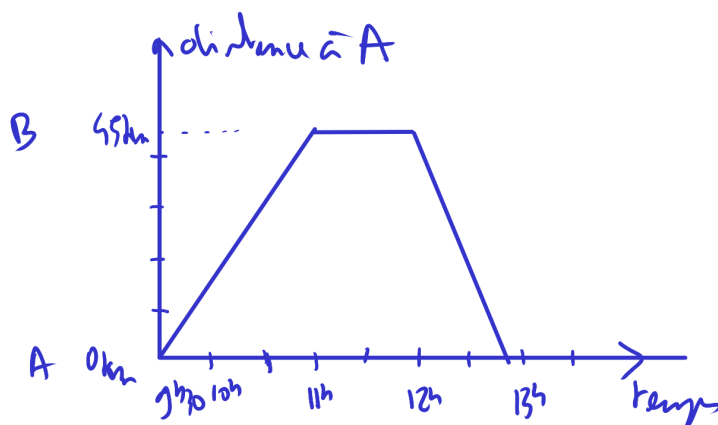
Solution de l'exercice 3 du verso de la feuille 1 et extrait du sujet 1 2014

Pour s'entraîner, un cycliste effectue un parcours aller-retour entre deux villes A et B distantes de 45 km. Il part de la ville A à 9h30 et on considère qu'à l'aller, il roule à une vitesse constante de 30 km/h. Après un repos d'une heure, il repart de la ville B et cette fois-ci rejoint la ville A à la vitesse constante de 50 km/h.

1. À quelle heure arrive-t-il à la ville B ?

La distance $d = 45$ km parcourue à l'aller entre les deux villes, le temps de parcours t_a de l'aller et la vitesse $v_a = 30$ km/h de ce parcours sont liés par la relation de $d = v_a \times t_a$ et donc $t_a = \frac{d}{v_a}$ c'est à dire $t_a = \frac{45}{30} = 1,5$ heure ou encore 1h30. Puisque le cycliste est parti de A à 9h30 il arrive en B 1h30 après c'est à dire à 11h00.

2. Représenter graphiquement la distance entre le cycliste et la ville A sur l'intégralité du parcours. On placera en abscisse l'heure de la journée et en ordonnée la distance entre le cycliste et la ville A exprimée en km.



3. À quelle heure est-il de retour à la ville A ? Donner le résultat en heures et minutes.

La distance $d = 45$ km parcourue au retour entre les deux villes, le temps de parcours t_r du retour et la vitesse $v_r = 50$ km/h de ce parcours sont liés par la relation de $d = v_r \times t_r$ et donc $t_r = \frac{d}{v_r}$ c'est à dire $t_r = \frac{45}{50} = 0,9$ heure ou encore 0h54. Or il entame son retour après une heure de pause et il est

arrivé en B à 11h00. Son départ pour le trajet du retour est donc à 12h00. Puisque le retour dure 0h54 c'est à dire 54 minutes il arrive en A à 12h54.

Solution de l'exercice 1 du recto de la feuille 2 et extrait du sujet 1 2015

A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :

- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- $A - B$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Trouver toutes les valeurs possibles pour A et B .

- Puisque A est un entier positif dont 111 est un multiple, A est un entier positif diviseur de 111 : c'est donc 1, 3, 37 ou 111.
- Puisque $A - B$ est nombre entier positif ou nul divisible par 10 et que B est un entier positif, il vient $B \geq 0$ et $A \geq A - B \geq 0$. Par conséquent $0 \leq B \leq A$ et $A - B$ est un multiple de 10 compris entre 0 et 111 : c'est 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 ou 110.
- Puisque $0 \leq B \leq A$, que $A \leq 111$ et que B est un cube, c'est 0, 1, 8, 27 ou 64, les seuls cubes compris entre 0 et 111.

Ainsi le couple (A, B) vérifie $A \in \{1, 3, 37, 111\}$ et $B \in \{0, 1, 7, 27, 64\}$. Parmi les 20 couples (A, B) de ce type seuls les couples $(1, 1)$, $(37, 27)$ et $(111, 1)$ vérifient

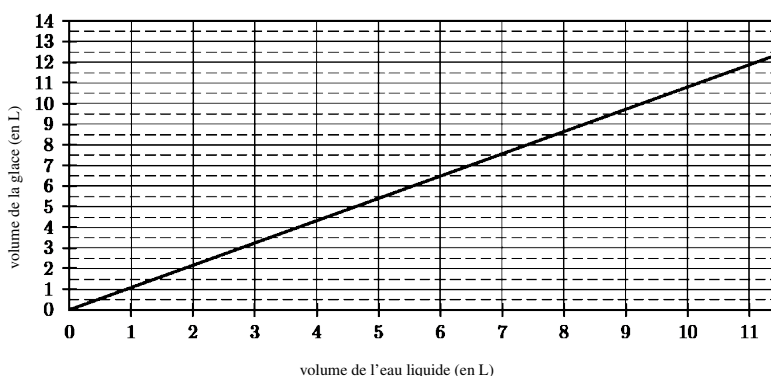
- $B - A \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110\}$.

Les solutions possibles sont ces trois couples.

Solution de l'exercice 2 du recto de la feuille 2 et extrait du sujet 1 2015

(D'après le sujet du DNB Métropole 2010) L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litre), en fonction du volume d'eau liquide (en litre).

Volume de glace en litre en fonction du volume d'eau liquide en litre



On répondra aux questions 1., 2. et 3. en utilisant le graphique ci-dessus.

1. Quel est le volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide ?

Puisque sur le graphique ci-dessus le segment de droite représente le volume de glace (en litre) en fonction du volume d'eau liquide (en litre), l'ordonnée du point du segment d'abscisse 7 correspond au volume de glace obtenu avec 7 litres d'eau liquide. On trouve 7,5 litres environ.

2. Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace ?

Puisque sur le graphique ci-dessus le segment de droite représente le volume de glace (en litre) en fonction du volume d'eau liquide (en litre), l'abscisse du point du segment d'ordonnée 9 correspond au volume d'eau liquide qu'il faut mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace. On trouve un peu moins de 8,5 litres.

3. Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier votre réponse.

Dans le graphique ci-dessus le volume de glace (en litre) en fonction du volume d'eau liquide (en litre) est représenté par un segment de droite qui passe par l'origine, le point de coordonnées (0,0), et qui n'est pas vertical. Ceci signifie que le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

4. On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?

L'augmentation en pourcentage d'une valeur qui passe de V_i à V_f est égale à $\frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100\%$. Par conséquent si 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace alors en gelant le volume d'eau a augmenté de $\frac{10,8 - 10}{10} \times 100\%$ c'est à dire 8% : ici on a appliqué la formule précédente avec $V_i = 10$ et $V_f = 10,8$.

5. Dans un souci de préservation de la ressource en eau, la ville de Lyon a imaginé un dispositif de recyclage. Cette ville fournit un volume de 20 m³ d'eau par jour aux engins de nettoyage grâce à

l'eau récupérée de la fonte de la glace de la patinoire de Baraban.

A combien de litres de glace correspond le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage ?

(source : article du 03/12/2013 - <http://blogs.grandlyon.com>).

La fonte de la glace de la patinoire de Baraban fournit 20 m^3 d'eau par jour aux engins de nettoyage de la ville de Lyon. Par conséquent pour 30 jours de nettoyage il y a $20 \times 30 \text{ m}^3$ c'est à dire 600 m^3 d'eau provenant de la patinoire qui sont utilisés pour le nettoyage. Ces 600 m^3 d'eau correspondent à 600×1000 litres c'est à dire 600000 litres d'eau puisque 1 m^3 correspond à 1000 litres.

On a vu dans la question précédente que l'eau en gelant augmentait de 8%. Par conséquent les 600000 litres d'eau utilisés pour le nettoyage proviennent d'un volume de glace de 8% supérieur c'est à dire de $600000 + \frac{8}{100} \times 600000$ litres de glace, autrement dit de 648000 litres de glace.

On vient d'utiliser ici le fait que si une quantité V_i augmente de $x\%$ alors elle se transforme en V_f avec $V_f = V_i + \frac{x}{100} V_i$ et dans la question $V_i = 600000$ et $x = 8$.

Solution de l'exercice 1 du verso de la feuille 2 et extrait du sujet 2 2015

(D'après le manuel Triangles 3ème (éditions Hatier)

Carole, partie en vacances 10 jours, a laissé le robinet du lavabo de la salle de bain entrouvert. Le débit de ce robinet était 3 litres par minute (L/min). Dans la ville où habite Carole, le prix moyen de l'eau est 3,50 euros le m^3 . Calculer les conséquences financières de la négligence de Carole.

On mesure les conséquences financière de la négligence de Carole en calculant le coût C de l'eau consommée par le robinet entrouvert pendant les 10 jours. Ce coût C est donné par la formule

$$C = Pu \times (D \times T) = Pu \times D \times T$$

où T désigne le temps total, D le débit d'eau et Pu le prix unitaire de l'eau. En effet ce coût C est proportionnel au volume d'eau consommée, le coefficient de proportionnalité étant égal au prix unitaire Pu de l'eau (le prix par unité d'eau), et le volume d'eau consommée est proportionnel au temps T et le coefficient de proportionnalité étant égal au débit D .

On va exprimer les données dans des unités de mesure compatibles entre elles. Le temps T est égal

à 10 jours ou encore $10 \times 24 \times 60$ minutes puisqu'une journée compte 24 heures et chaque heure compte 60 minutes : $T = 14400$ minutes. Le prix unitaire P_u vaut $P_u = 3,50$ euros/m³. Le débit D vaut 3 litres par minute et donc $D = 3 \times 10^{-3}$ m³/s.

Par conséquent, d'après la formule,

$$C = 14400 \times 3 \times 10^{-3} \times 3,50 = 151,20 \text{ euros.}$$

La négligence de Carole a un coût de 151,20 euros.

Solution de l'exercice 2 du verso de la feuille 2 et extrait du sujet 2 2015

Simon lance deux dés équilibrés à six faces, numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et 6, puis il additionne les deux nombres obtenus. Il prétend qu'il a autant de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Est-ce exact ?

Le tableau suivant indique la somme des deux nombres obtenus en lançant deux dés.

<div style="border-bottom: none; border-right: none; border-left: none; border-top: none;"> dé 2 dé 1 </div>	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 36 tirages possibles, tous avec la probabilité de $\frac{1}{36}$ (équiprobabilité). Parmi ces tirages 4 donnent une somme égale à 5 (en rouge dans le tableau) et 6 donnent une somme égale à 7 (en vert dans le tableau).

Puisque c'est une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Ainsi la probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est donc de $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ et elle strictement inférieure à celle d'obtenir une somme égale à 7 qui est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

On peut conclure que Simon a plus de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Il n'en a donc pas le même nombre.

Solution de l'exercice 3 du verso de la feuille 2 et extrait du sujet 3 2015

Une petite entreprise emploie 7 personnes, dont 3 femmes.

Voici quelques informations sur le salaire mensuel des personnels :

Salaires des hommes :

1250 euros ; 1400 euros ; 1600 euros ; 3200 euros

Salaires des femmes :

salaire médian : 1875 euros ; salaire moyen : 1700 euros ; étendue des salaires : 1000 euros

Le patron de l'entreprise veut embaucher une femme supplémentaire pour respecter la parité.

Calculer le salaire qu'il doit verser à cette nouvelle recrue pour que les salaires moyens des hommes et des femmes soient égaux.

Calculons la moyenne m_h des salaires des hommes. On fait la somme de ces salaires, 7450 euros, qu'on divise par l'effectif qui est 4. On trouve $m_h = 1862,50$ euros.

La moyenne m_f des salaires des 3 femmes est de 1700 euros. Elles perçoivent donc globalement 5100 euros ($5100 = 3 \times 1700$).

Le salaire X de la nouvelle femme recrutée est fixé de telle sorte que le nouveau salaire moyen m_{nf} des femmes soit égal à celui des hommes, c'est à dire $m_{nf} = 1862,50$ euros. Or $m_{nf} = \frac{5100 + X}{4}$ puisque suite au recrutement il y a 4 femmes et la somme de leur salaires vaut $5100 + X$. Ainsi

$$1862,50 = \frac{5100 + X}{4}$$

qui donne

$$5800 + X = 4 \times 1862,50$$

et donc

$$X = 4 \times 1862,50 - 5100$$

c'est à dire $X = 2350$ euros.

Le salaire de la nouvelle recrue doit donc être de 2350 euros.

Solution de l'exercice 4 du verso de la feuille 2 et extrait du sujet 2 2015

Un fleuriste reçoit 12 tulipes et 18 roses pour faire des bouquets. Il souhaite utiliser toutes ses fleurs et composer des bouquets identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes). Quelles sont ses différentes possibilités ?

Avec 12 tulipes et 18 roses le fleuriste forme un nombre n de bouquets tous identiques formés chacun de t tulipes et r roses. Il vient donc $nt = 12$ et $nr = 18$. Le nombre n de bouquets est donc un diviseur commun à 12 et 18. Il est donc égal à 1, 2, 3 ou 6.

Chaque diviseur donne lieu à une façon de faire des bouquet et chaque façon de faire des bouquets est associée à un diviseur.

Il y a donc autant de façons de faire des bouquets que de diviseurs, c'est à dire 4 façons.

Solution de l'unique exercice de la feuille 3 et extrait du sujet 2 2014

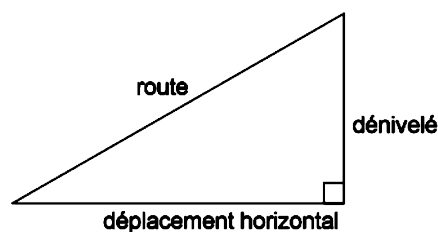
Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la mythique station de ski de Kitzbühel.

Suivons-le dans son périple et ses diverses activités.

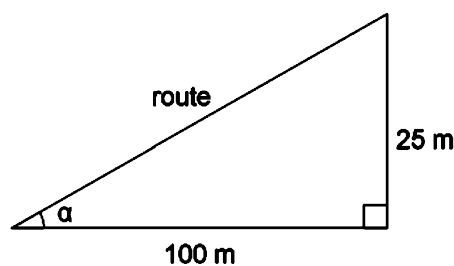
A. La montée à la station

Sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25%.

La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).



Ainsi une pente de 25% indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle

On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1. Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.

On utilise ici le fait que dans un triangle ABC , rectangle en B et dont la base $[AB]$ est horizontale et la hauteur $[BC]$ est verticale, l'angle α de l'hypoténuse $[AC]$ avec l'horizontale, c'est à dire l'angle au sommet A , vérifie $\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB}$. Puisque la route est telle que lorsqu'on la parcourt en faisant un déplacement horizontal de 100 m on monte de 25 m, l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale admet pour tangente $\tan(\alpha) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. La calculatrice indique qu'un tel angle vaut 14° (à 1° près par défaut).

2. Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

La route correspond à un segment de droite d'inclinaison constante. Le déplacement horizontal est donc proportionnel à l'élévation. Or, lorsqu'on s'élève de 25 m, on fait un déplacement horizontal de 100 m. Donc, en s'élevant de $D = 145$ m, on fait un déplacement horizontal h qui vérifie $\frac{h}{145} = \frac{100}{25} = 4$. Par conséquent $h = 4 \times 145$ m c'est à dire 580 m.

La longueur L du tronçon, le dénivelé $D = 145$ m et le déplacement horizontal $h = 580$ m sont les longueurs de l'hypoténuse (pour L) et des deux autres côtés (pour D et h) d'un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore on a $L^2 = D^2 + h^2$ c'est à dire $L^2 = 145^2 + 580^2$ ou encore $L^2 = 357425$ et donc $L = \sqrt{357425}$ c'est à dire $L = 598$ m (à 1 m près par excès). La longueur du tronçon est de 598 m (à 1 m près par excès).

B. Ski sur la Streif

Sitôt arrivé, Albert décide de dévaler la piste appelée Streif, réputée la plus difficile au monde.

Voici quelques caractéristiques de cette piste :

- Longueur totale : 3312 m
- Pente maximale : 85 %

- Pente minimale : 5 %
- Dénivelé : 862 m

1. Albert s'élance dans la descente à 14 h 58 min 47 s et termine la descente à 15 h 03 min 08 s. Calculer sa vitesse moyenne durant cette descente, en km/h, arrondie au dixième.

La vitesse moyenne v en km/h d'un parcours vérifie $v = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue exprimée en km et t est le temps de parcours exprimé en heures.

Ici la distance parcourue est de 3312 m c'est à dire de $d = 3,312$ km puisque 1 km=1000 m.

Puisque la descente débute à 14 h 58 min 47 s et termine à 15 h 03 min 08 s le temps de parcours est égal à

$$(15 \text{ h } 03 \text{ min } 08 \text{ s}) - (14 \text{ h } 58 \text{ min } 47 \text{ s}) = (15-14) \text{ h} + (03-58) \text{ min} + (08-47) \text{ s}$$

qui s'écrit aussi

$$1 \text{ h} - 55 \text{ min} - 39 \text{ s}$$

ou encore

$$5 \text{ min} - 39 \text{ s}$$

c'est à dire

$$4 \text{ min} + (60-39) \text{ s}$$

ce qui donne 4 min 21 s (en utilisant les égalités 1 h = 60 min et 1 min = 60 s).

Puisque 1 h = 60 min et 1 min = 60 s il vient 1 min = $\frac{1}{60}$ h et 1 s = $\frac{1}{3600}$ h le temps de parcours qui est de 4 min 21 s vaut $t = \frac{1}{60}4 + \frac{1}{3600}21$ h c'est à dire de $t = 0,0725$ h.

La vitesse moyenne de la descente est donc $v = \frac{3,312}{0,0725}$ km/h c'est à dire $v = 45,7$ km/arrondie au dixième par excès.

2. Le meilleur skieur de la station a réalisé la descente à la vitesse moyenne de 100 km/h. S'il s'était lancé dans la descente au même instant qu'Albert, combien de temps avant lui serait-il arrivé ?

Calculons le temps de parcours du meilleur skieur. Puisque la distance parcourue d (ici d vaut 3,312 km) est égale au produit de la vitesse v (ici $v = 100$ km/h) par le temps de parcours T on a $3,312 = 100 \times T$ si T est exprimé en heure. Ainsi $T = \frac{3,312}{100} = 0,003312$ h ou $T = 0,003312 \times 3600$ s (car 1 h = 3600 s) c'est à dire 119,232 s ou encore 1 min 59,232 s. Le temps de parcours du meilleur skieur est de 1 min 59,232 s.

Or le temps de parcours d'Albert est de 4 min 21 s d'après la question précédente. C'est pourquoi, si les deux skieurs étaient partis en même temps le meilleur skieur serait arrivé avant Albert de (4 min 21 s) - (1 min 59,232 s) c'est à dire de 2 min 21,768 s ou encore de 2 min 22 s à 1 s près par excès.

C. Saut sur la Streif

Lors de sa descente de la Streif, Albert effectue un saut.

On admet que la hauteur du saut d'Albert par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x , par la fonction S suivante :

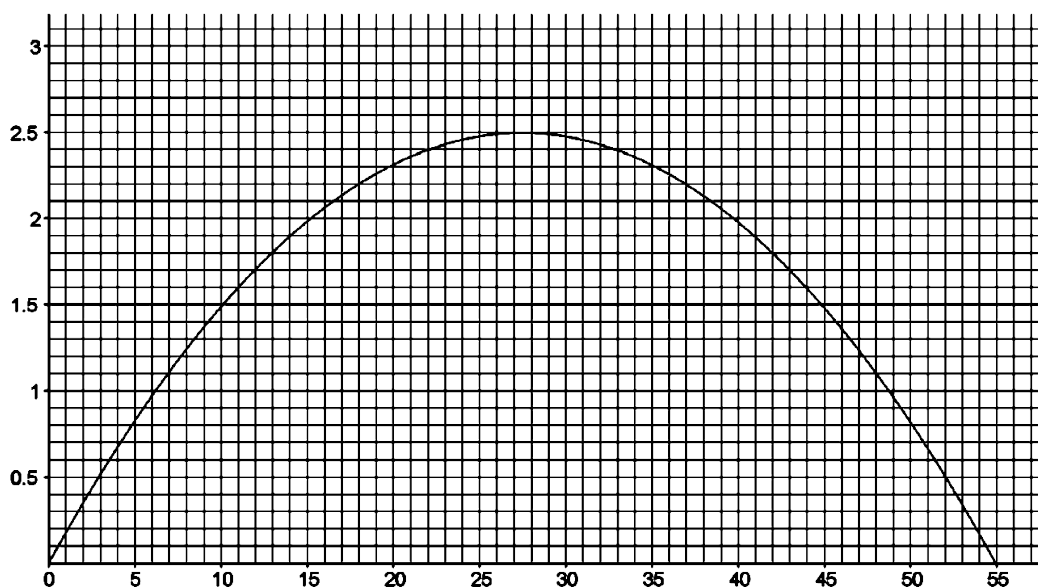
$$S : x \mapsto 2,5 - \frac{(2x - 55)^2}{1210},$$

x et $S(x)$ étant exprimés en mètre.

1. Calculer l'image de 10 par la fonction S . Interpréter ce résultat en ce qui concerne le saut d'Albert.

Il vient $S(10) = 2,5 - \frac{(2 \times 10 - 55)^2}{1210} = 2,5 - \frac{35^2}{1210} = 2,5 - \frac{1225}{1210} = 1,49$ à 10^{-2} près par excès. Ceci signifie que lors de son saut, Albert atteint une hauteur de 1,49 m à 1 cm près par excès quand il a parcouru 10 m dans les airs (sans pour autant que le saut soit fini).

2. On a tracé la courbe représentative de cette fonction S .



a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?

La valeur 55 sur l'axe des abscisses correspond à $S(55) = 0$ c'est à dire au point où Albert retombe sur la piste. Albert réalise donc un saut qui correspond à un déplacement horizontal de 55 m.

b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert. A quel déplacement horizontal cette valeur correspond-elle ?

La hauteur maximale atteinte par Albert lors de son saut est de 2,5 m. On peut le constater en traçant une droite horizontale d'équation $y = 2,5$ sur le graphique et observer que d'une part elle ne coupe la courbe qu'en un point et que d'autre part la courbe est strictement sous cette droite sauf en cet unique point commun. Cette hauteur maximale correspond à un déplacement horizontal de 27,5 m car 27,5 est l'abscisse de l'unique point d'intersection de la droite d'équation $y = 2,5$ et de la courbe.

3. À l'aide de l'expression de la fonction S, retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

La hauteur du saut d'Albert par rapport au déplacement horizontal est donnée par la fonction

$$S : x \mapsto 2,5 - \frac{(2x - 55)^2}{1210},$$

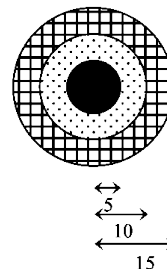
x et $S(x)$ étant exprimés en mètre.

Or, si x est un réel alors le carré $(2x - 55)^2$ est positif ou nul, $-\frac{(2x-55)^2}{1210}$ est négatif ou nul et par conséquent $S(x) = 2,5 - \frac{(2x-55)^2}{1210}$ est inférieur ou égal à 2,5. De plus le carré $(2x - 55)^2$ s'annule si et

seulement si $2x - 55 = 0$ c'est à dire si et seulement si $x = \frac{55}{2} = 27,5$. Par conséquent $S(27,5) = 2,5$ et si $x \neq 27,5$ alors $(2x - 55)^2 > 0$ et $S(x) < 2,5$. Ceci montre que la hauteur maximale du saut d'Albert est 2,5 m et qu'elle n'est atteinte que pour un déplacement horizontal de 27,5 m.

D. Tir à la carabine

Albert observe ensuite un entraînement au tir à la carabine sur une cible. La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-contre.



Un débutant touche la cible une fois sur deux. Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Les mesures des rayons

ci-dessus sont en centimètres

1. Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?

Lorsqu'on a atteint la cible C , la probabilité $p_C(Z)$ d'atteindre une zone donnée Z est proportionnelle à l'aire $A(Z)$ de cette zone et elle vaut 1 pour la cible toute entière d'aire $A(C)$ puisqu'on l'a atteint : $p_C(Z) = \frac{A(Z)}{A(C)} \times 1 = \frac{A(Z)}{A(C)}$. Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle.

De plus l'aire d'un disque de rayon r est $\pi r^2 = r^2\pi$. Ainsi l'aire de la cible qui a un rayon de 15 cm est donc $A(C) = 15^2\pi \text{ cm}^2$ c'est à dire $A(C) = 225\pi \text{ cm}^2$. La couronne extérieure est constituée des points de la cible de rayon 15 cm qui ne sont pas dans le disque de rayon 10 cm à l'intérieur de la cible. Son aire est donc $A(Z) = 15^2\pi - 10^2\pi \text{ cm}^2$ c'est à dire $A(Z) = 125\pi \text{ cm}^2$.

Par conséquent la probabilité $p_C(Z)$ d'atteindre la couronne extérieure lorsqu'on touche la cible est $p_C(Z) = \frac{125\pi}{225\pi} = \frac{5}{9}$ c'est à dire $p_C(Z) = 0,55 = 55\%$ à 1% près par défaut.

2. Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?

L'événement "toucher la cible et atteindre son cœur" est l'intersection de l'événement C = "toucher la cible" et de l'événement M = "atteindre son cœur".

La probabilité de "toucher la cible et d'atteindre son cœur" est donc la probabilité $p(C \cap M)$. Cette probabilité vérifie $p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M)$.

On sait que $p(C) = \frac{1}{2}$ et que $p_C(M) = \frac{A(M)}{A(C)}$ où $A(M)$ est l'aire du coeur qui est un disque de rayon 5 cm.

On a $A(M) = 5^2\pi = 25\pi \text{ cm}^2$. Puisque $A(C) = 225\pi \text{ cm}^2$ on a donc $p_C(M) = \frac{25\pi}{225\pi} = \frac{1}{9}$.

Par conséquent $p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ c'est à dire $p(C \cap M) = 0,055 = 5,5\%$ à 0,1% près par défaut.

La probabilité qu'un tireur débutant touche la cible et atteigne le coeur de la cible est donc de 0,055=5,5% à 0,1% près par défaut.

Solutions des exercices 2 de la feuille 2 verso, de l'exercice 2 de la feuille 6 recto et de l'exercice 2 de la feuille 6 verso

Exercice 2 de la feuille 2 verso

Simon lance deux dés équilibrés à six faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, puis il additionne les deux nombres obtenus. Il prétend qu'il a autant de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Est-ce exact ?

On dispose de deux dés qu'on appelle l'un A et l'autre B . Lorsqu'on les lance on obtient un couple (a, b) de nombres entiers compris entre 1 et 6, le nombre a étant lu sur A et le nombre b sur B . Il y a 36 tels couples. Les deux dés sont équilibrés : pour chaque dé, tous les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ont la même chance de tomber qui est de $\frac{1}{6}$. On peut supposer que le nombre que donne chaque dé est indépendant du nombre que donne l'autre dé. Aussi tous les couples (a, b) de nombres entiers compris entre 1 et 6 ont la même chance de tomber qui est de $\frac{1}{36}$.

Les couples (a, b) dont la somme $a + b$ vaut 7 sont au nombre de 6 : $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ et $(6, 1)$. Par conséquent la probabilité de tomber sur l'un d'eux est de $6 \times \frac{1}{36}$ c'est à dire de $\frac{1}{6}$.

Les couples (a, b) dont la somme $a + b$ vaut 5 sont au nombre de 4 : $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ et $(4, 1)$. Par conséquent la probabilité de tomber sur l'un d'eux est de $4 \times \frac{1}{36}$ c'est à dire de $\frac{1}{9}$.

Puisque $\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$ on a plus de chance d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Simon se trompe donc.

Exercice 4 de la feuille 2 verso Un fleuriste reçoit 12 tulipes et 18 roses pour faire des bouquets. Il souhaite utiliser toutes ses fleurs et composer des bouquets identiques (même nombre de roses et

même nombre de tulipes). Quelles sont ses différentes possibilités ?

Décrivons tout d'abord ce qu'est une possibilité de bouquets qui convienne. Il s'agit de n bouquets identiques, chacun étant constitué de t tulipes et de r roses. Puisque toutes les fleurs sont utilisées on a $12 = n \times t$ et $18 = n \times r$. L'entier naturel n caractérise la possibilité puisqu'il détermine le nombre t de tulipes par bouquet ($t = \frac{12}{n}$) et le nombre r de roses par bouquet $r = \frac{18}{n}$.

Puisque t et r sont des entiers, une possibilité est entièrement déterminée par un entier naturel n qui divise 12 et 18. Cet entier n est donc égal à 1, 2, 3 ou 6, l'un des quatre entiers naturels diviseurs communs à 12 et 18.

Il y a donc 4 possibilités :

- faire 1 seul bouquet de 12 tulipes et 18 roses ;
- faire 2 bouquets de 6 tulipes et 9 roses ;
- faire 3 bouquets de 4 tulipes et 6 roses ;
- faire 6 bouquets de 2 tulipes et 3 roses.

Exercice 2 de la feuille 6 recto

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

- Rob tire une boule au hasard, note sa couleur, la remet dans l'urne, tire une seconde boule au hasard et note sa couleur.
- Sam tire une boule au hasard, note sa couleur, et sans la remettre dans l'urne en tire une seconde au hasard, puis note sa couleur.

1. En notant B_1 et B_2 les deux boules blanches, et N la boule noire, établir pour chacune des deux situations la liste de tous les couples de tirages possibles.

Puisque Rob fait deux tirages successifs en remettant entre les deux la première boule tirée les couples qu'ils peut obtenir sont (B_1, B_1) , (B_1, B_2) , (B_1, N) , (B_2, B_1) , (B_2, B_2) , (B_2, N) , (N, B_1) , (N, B_2) , (N, N) .

Puisque Sam fait deux tirages successifs sans remise de la première boule tirée les couples qu'ils peut obtenir sont (B_1, B_2) , (B_1, N) , (B_2, B_1) , (B_2, N) , (N, B_1) , (N, B_2) .

2. Dorine affirme que la probabilité est la même pour les deux garçons d'obtenir une boule blanche lors de leur second tirage. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

Lorsque Rob joue les neuf couples indiqués ont la même chance d'être tirés. Ceux qui correspondent

à obtenir une boule blanche lors du second tirage sont au nombre de 6. Il y a donc 6 cas favorables sur les 9 possibles. Aussi la probabilité pour que Rob obtienne une boule blanche lors du second tirage est de $\frac{6}{9}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{2}{3}$.

Lorsque Sam joue les six couples indiqués ont la même chance d'être tirés. Ceux qui correspondent à obtenir une boule blanche lors du second tirage sont au nombre de 4. Il y a donc 4 cas favorables sur les 6 possibles. Aussi la probabilité pour que Sam obtienne une boule blanche lors du second tirage est de $\frac{4}{6}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{2}{3}$.

Ainsi Rob et Sam ont chacun deux chances sur trois d'obtenir un boule blanche au second tirage. Dorine a raison.

Exercice 2 de la feuille 6 verso

Dans tout l'exercice, les dés sont équilibrés. Un dé cubique possède six faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face du dessus. Un dé tétraédrique possède quatre faces numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face cachée.

1. Karim et Brigitte s'amuse à lancer simultanément deux dés cubiques. Le score est obtenu en ajoutant les nombres donnés par les deux dés.

a. Karim dit : "Les scores possibles sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. On a donc plus de chances d'obtenir un score pair!". Karim a-t-il raison? Justifier.

Lorsqu'on lance deux dés cubiques qu'on peut appeler A et B on obtient 36 tirages possibles : chaque couple (a, b) avec a et b correspondant à des entiers entre 1 et 6 caractérise un des tirages, le nombre a correspond à celui donné par A et le nombre b celui donné par B . Comme les dés sont équilibrés et qu'on peut les supposer indépendants, les 36 tirages sont équiprobables.

Ceux qui donnent des scores pairs sont au nombre de 18. Ils correspondent aux couples (a, b) avec a et b parmi 2, 4, 6 (9 couples) et aux couples (a, b) avec a et b parmi 1, 3, 5 (9 couples). Il y a donc 18 cas favorables (correspondant aux scores pairs) sur 36 cas possibles (tous les tirages possibles).

La probabilité de faire un score pair est donc de $\frac{18}{36}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{1}{2}$. Karim se trompe donc en affirmant qu'on a plus de chances d'obtenir un score pair.

b. Brigitte dit : "On a une chance sur trois d'obtenir un score multiple de 3." Brigitte a-t-elle raison ?

Justifier.

Obtenir un score multiple de 3 c'est obtenir 3, 6, 9 ou 12. Comptons les tirages qui donnent ces scores :

- on obtient 3 avec (1,2) et (2,1) ;
- on obtient 6 avec (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) et (5,1) ;
- on obtient 9 avec (3,6), (4,5), (5,4) et (6,3) ;
- on obtient 12 avec (6,6).

On en trouve 12. Il y a donc 12 cas favorables (correspondant aux scores multiples de 3) sur 36 cas possibles (tous les tirages possibles). La probabilité de faire un score multiple de 3 est donc de $\frac{12}{36}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{1}{3}$. Brigitte a raison en affirmant qu'on a une chance sur trois d'obtenir un score multiple de 3.

2. Karim et Brigitte s'amuse maintenant à lancer simultanément un dé cubique et un dé tétraédrique. Le score est obtenu en multipliant les nombres donnés par les deux dés.

a. Avec cette nouvelle règle, a-t-on autant de chances d'obtenir un score pair qu'un score impair ?

Lorsqu'on lance deux dés on obtient 24 tirages possibles : chaque couple (a,b) avec a correspondant à un entier entre 1 et 6 (dé cubique) et avec b correspondant à un entier entre 1 et 4 (dé tétraédrique). Comme les dés sont équilibrés et qu'on peut les supposer indépendants, les 24 tirages sont équiprobables.

Ceux qui correspondent à un score impair sont ceux pour lesquels a et b sont impairs (car pour que le produit de deux entiers soit impair il faut et il suffit que les deux entiers le soient) c'est à dire a égal à 1, 3 ou 5 et b égal à 1 ou 3. Ces couples sont au nombre de 6 ($6 = 3 \times 2$ car il y a 3 possibilités pour a et 2 pour b).

Il y a donc 6 cas favorables (correspondant aux scores impairs) sur 24 cas possibles (tous les tirages possibles). La probabilité de faire un score impair est donc de $\frac{6}{24}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{1}{4}$.

La probabilité de faire un score impair est la probabilité de l'événement complémentaire à celui de faire un score pair et c'est donc $1 - \frac{1}{4}$ c'est à dire $\frac{3}{4}$.

Avec cette nouvelle règle on a donc plus de chances d'obtenir un score pair (probabilité de $\frac{3}{4}$) qu'un score impair (probabilité de $\frac{1}{4}$).

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 ?

Comme précédemment chaque couple (a, b) avec a correspondant à un entier entre 1 et 6 (dé cubique) et avec b correspondant à un entier entre 1 et 4 (dé tétraédrique). Dénombrons les tirages correspondant aux scores multiples de 3 en distinguant trois situations distinctes :

- $a = 3$ et b quelconque (4 tirages) ;

- $a = 6$ et b quelconque (4 tirages) ;

- $b = 3$ et a égal à 1, 2, 4 ou 5 (4 tirages) (on exclut les cas $a = 3$ et $a = 6$ déjà considérés).

On en trouve 12. Il y a donc 12 cas favorables (correspondant aux scores multiples de 3) sur 24 cas possibles (tous les tirages possibles). La probabilité de faire un score multiple de 3 est donc de $\frac{12}{24}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{1}{2}$.

Solutions des exercices de la feuille 7

Exercice (premier exercice de la feuille 7)

1/ Soit k un entier naturel.

1.a. Développer $(3k + 1)^2 - 1$ et $(3k + 2)^2 - 1$.

En utilisant l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ appliquée à $a = 3k$ et $b = 1$ puis à $a = 3k$ et $b = 2$ on obtient

$$\begin{aligned}(3k + 1)^2 - 1 &= (9k^2 + 6k + 1) - 1 \\ &= 9k^2 + 6k\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(3k + 2)^2 - 1 &= (9k^2 + 12k + 4) - 1 \\ &= 9k^2 + 12k + 3\end{aligned}$$

1.b. En déduire que $(3k + 1)^2 - 1$ et $(3k + 2)^2 - 1$ sont des multiples de 3.

Puisque 3 divise 3, 9 et 12 il divise aussi $9k^2 + 6k$ qui vaut $(3k+1)^2 - 1$ ainsi que $9k^2 + 12k + 3$ qui vaut $(3k+2)^2 - 1$.

2/ Soit n un entier naturel.

2.a. Dire pourquoi il existe un entier naturel k et un entier r égal à 0, 1 ou 2 tels que $n = 3k + r$.

C'est la division euclidienne de l'entier naturel n donne un unique couple d'entiers naturels (k, r) tel que r égal à 0, 1 ou 2 et tel que $n = 3k + r$. L'entier k est le quotient de la division euclidienne de n par 3 et l'entier r le reste.

2.b. Vérifier l'égalité $n(n^2 - 1) = n^3 - n$.

On développe $n(n^2 - 1)$ en utilisant les règles de calcul littéral usuelles et on obtient :

$$\begin{aligned}n(n^2 - 1) &= n \times n^2 + n \times (-1) \\ &= n^3 - n\end{aligned}$$

2.c. Montrer que $n^3 - n$ est un multiple de 3.

Soit n un entier naturel. Alors par division euclidienne (question 2.a.) il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r = 0, 1$ ou 2 tel que $n = 3k + r$.

Discutons en fonction de r .

Cas $r = 0$. Alors $n = 3k$ et $n(n^2 - 1) = 3k(n^2 - 1)$ est divisible par 3.

Cas $r = 1$. Alors $n = 3k + 1$ et $n(n^2 - 1) = n((3k + 1)^2 - 1)$. Or d'après la question 1.b. $(3k + 1)^2 - 1$ est divisible par 3. Puisque $n(n^2 - 1)$ est un multiple de $n^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1$ il est donc aussi divisible par 3.

Cas $r = 2$. Alors $n = 3k + 2$ et $n(n^2 - 1) = n((3k + 2)^2 - 1)$. Or d'après la question 1.b. $(3k + 2)^2 - 1$ est divisible par 3. Puisque $n(n^2 - 1)$ est un multiple de $n^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1$ il est donc aussi divisible par 3.

Extraits du sujet 5 2018

Exercice 2 Pour faire de la confiture, Grand-père ajoute à des mirabelles une masse de sucre égale

aux quatre cinquièmes de la masse des fruits dénoyautés. La cuisson fait perdre 25% de la masse du mélange. Après la cuisson, la confiture est conditionnée dans des pots de 500 g. Les pots doivent être remplis pour une bonne conservation.

1. Aujourd'hui Grand-père a récolté des mirabelles; après les avoir dénoyautées, il a obtenu 5 kg de fruits. Combien de pots de confiture peut-il remplir?

Soit f la masse de fruits dénoyautés qui rentrent la confection de la confiture, soit s la masse de sucre et soit c la masse de confiture obtenue après cuisson.

D'après l'énoncé $s = \frac{4}{5}f$ et

$$\begin{aligned}c &= (f + s) - \frac{25}{100}(f + s) \\ &= \frac{75}{100}\left(f + \frac{4}{5}f\right) \\ &= \frac{75}{100}\left(\frac{9}{5}f\right) \\ &= \frac{27}{20}f\end{aligned}$$

Puisque $f = 5$ kg il vient que $c = \frac{27}{20}5$ kg c'est à dire 6,75 kg ou encore 6750 g.

Un pot contient 500 g de confiture. Puisque par division euclidienne de 6750 par 500 on obtient $6750 = 13 \times 500 + 250$ on conclut qu'avec 5 kg de fruits dénoyautés le Grand-père produit 6,75 kg de confiture qu'il met dans 13 pots pleins et il lui reste 250 g qui ne permettent pas de compléter un pot.

2. La masse de confiture obtenue par le procédé suivi par Grand-père est-elle proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées? Justifier votre réponse.

On a montré que la masse c de confiture obtenue vaut $c = \frac{27}{20}f$ où f est la masse de fruits dénoyautés obtenus. La masse de confiture obtenue est donc bien proportionnelle à la masse de fruits dénoyautés. Le coefficient de proportionnalité est $\frac{27}{20}$. Ce n'est pas vrai pour la masse de confiture mise en pot en raison du reste non nul qui apparaît.

3. Grand-père souhaite obtenir 18 pots de confiture. Déterminer la masse minimum de mirabelles dénoyautées que Grand-père devra prévoir. On arrondira la masse à l'hectogramme près.

Grand-père souhaite produire 18 pots de 500 g, c'est à dire 18 pots de 5 hectogrammes (5 hg). La masse totale de confiture que ça représente est $c = 18 \times 5$ hg c'est à dire $c = 90$ hg.

Or on a montré que $c = \frac{27}{20}f$ où f est la masse de fruits dénoyautés pour produire la confiture. On a donc $f = \frac{20}{27}c$. Puisque $c = 90$ hg on obtient $f = \frac{20}{27}90$ hg c'est à dire $f = \frac{200}{3}$ hg ou encore 67 hg arrondi à l'hectogramme près par excès. La masse m minimum de mirabelles dénoyautées que Grand-père devra prévoir est donc de 67 hg à l'hectogramme près par excès.

Exercice 4

On a tracé un segment de 6,5 cm. À partir de ce segment, on cherche à construire un triangle en utilisant les valeurs obtenues par le lancer de deux dés cubiques équilibrés de couleurs différentes dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. La valeur obtenue par chacun des deux dés déterminera les longueurs, en centimètre, des deux autres côtés du triangle.

1. Le lancer des dés donne les nombres "4" et "5". Construire le triangle que ce lancer permet d'obtenir.

Le triangle obtenu possède un côté de 6,5 cm, un deuxième côté de 4 cm qui correspond au tirage du 4 et un troisième côté de 5 cm qui correspond au tirage du 5.

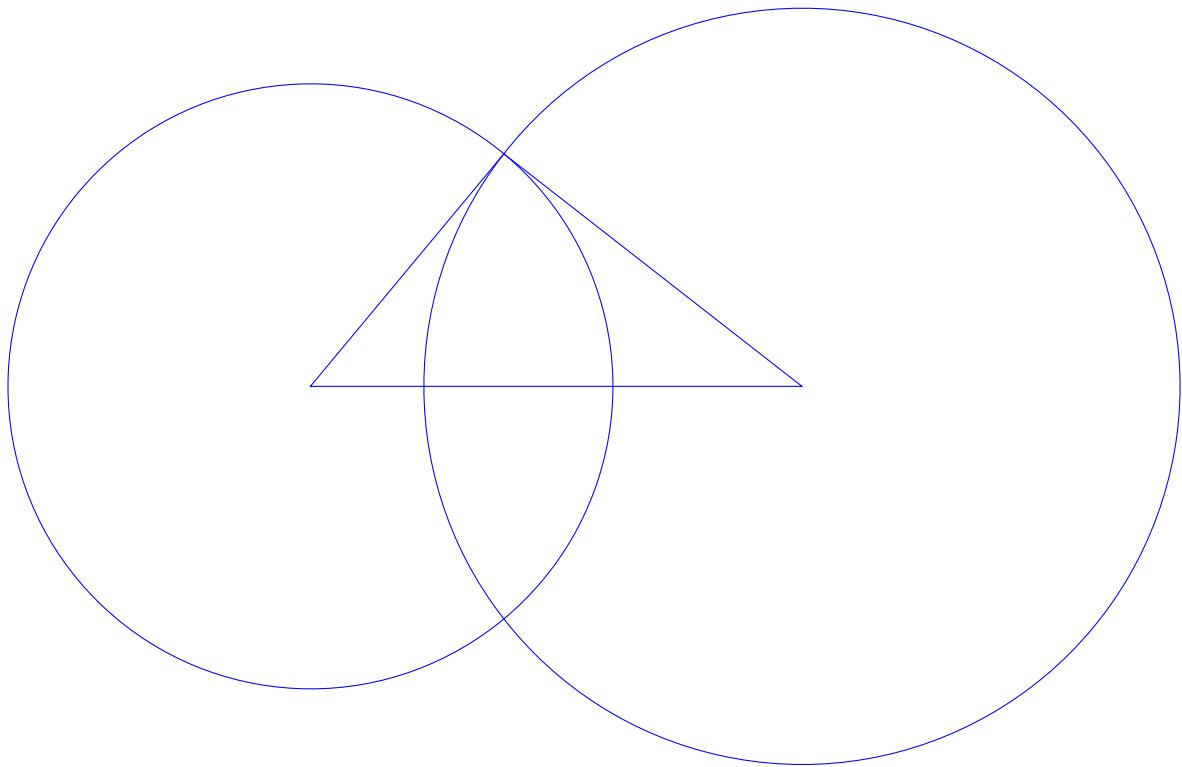
Le tracé peut être réalisé de la façon suivante avec une règle graduée et un compas.

1/ Tracer à la règle graduée un segment de longueur 6,5 cm.

2/ Tracer un cercle de rayon 4 cm et centré à une extrémité du segment tracé à l'étape 1.

3/ Tracer un cercle de rayon 5 cm et centré à l'autre extrémité du segment tracé à l'étape 1.

4/ Les deux cercles ainsi tracés se coupent en exactement deux points. On en choisit un et on trace les deux segments différents qui ont ce point comme première extrémité et qui ont comme seconde extrémité chacun l'une des deux extrémités du segment tracé à l'étape 1.



2. Quelle condition doivent remplir les deux longueurs obtenues avec les dés pour que le triangle soit constructible ?

D'après l'inégalité triangulaire, le plus grand côté d'un triangle a une longueur inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. Par conséquent si la somme des deux longueurs obtenues est strictement inférieure à 6,5 cm alors il n'est pas possible de construire le triangle.

De plus si $0 \leq a, b \leq c$ sont tels que $c \leq a + b$ alors il existe un triangle dont les longueurs des cotés sont a , b , et c . Or les longueurs obtenues par les dés sont des entiers naturels compris entre 1 et 6 et donc sont inférieures à la longueur du segment initial qui est 6,5 cm. Par conséquent, en appliquant l'affirmation avec a et b les deux longueurs tirées aux dés et avec $c = 6,5$ on conclut que si la somme des deux longueurs obtenues est supérieure ou égale à 6,5 cm alors le triangle est constructible.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire ?

Lorsqu'on lance les deux dés cubiques qu'on peut appeler A et B on obtient 36 tirages possibles : chaque couple (a, b) avec a et b correspondant à des entiers entre 1 et 6 caractérise un des tirages, le nombre a correspond à celui donné par A et le nombre b celui donné par B . Comme les dés sont équilibrés et qu'on peut les supposer indépendants, les 36 tirages sont équiprobables.

Parmi ces 36 tirages ceux qui correspondent à un triangle constructible sont les tirages (a, b) avec $a + b \geq 6,5$ c'est à dire les tirages suivants :

- (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1),
- (5, 6), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2),
- (4, 6), (4, 5), (4, 4), (4, 3),
- (3, 6), (3, 5), (3, 4),
- (2, 6), (2, 5),
- (1, 6).

Il sont au nombre de 21. Il y a donc 21 cas favorables sur les 36 possibles. Aussi la probabilité d'obtenir un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire est de $\frac{21}{36}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{7}{12}$.

4. On sait que l'on a obtenu un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire. Quelle est la probabilité pour qu'il soit isocèle ?

Parmi les 21 tirages qui donnent un triangle constructible, ceux qui donnent un triangle isocèle sont ceux pour lesquels les deux dés donne le même nombre. Ce sont les tirages (6, 6), (5, 5) et (4, 4). Il sont au nombre de 3. Il y a donc 3 cas favorables sur les 21 possibles. Aussi la probabilité d'obtenir un triangle isocèle sachant que la réalisation de l'expérience donne un triangle constructible est de $\frac{3}{21}$ (rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles) c'est à dire de $\frac{1}{7}$.

Une autre façon de raisonner est de passer à la notion de probabilité conditionnelle. Notons C l'événement "Obtenir un tirage qui permette la réalisation d'un triangle". Notons I l'événement "Obtenir un triangle isocèle." D'après la question 3 la probabilité $p(C)$ d'obtenir un tirage qui permette la réalisation d'un triangle est $p(C) = \frac{7}{12}$. Puisqu'il y trois tirages qui permettent de réaliser un triangle isocèle, à savoir les tirages (6, 6), (5, 5) et (4, 4), la probabilité $p(I)$ d'obtenir un tirage qui permette la réalisation d'un triangle isocèle est $p(I) = \frac{1}{12}$ (rapport entre 3 qui est le nombre de cas favorables et 36 qui est le nombre de cas possibles et équiprobables, c'est à dire le nombre total de tirages). De plus $C \cap I$ est égal à l'événement I donc $p(C \cap I) = p(I) = \frac{1}{12}$. Donc la probabilité d'obtenir un triangle isocèle (événement I) sachant qu'on a obtenu un triangle permettant de construire un triangle (événement C) est la probabilité $p_C(I)$ de I sachant C et elle vérifie $p_C(I) = \frac{p(C \cap I)}{p(C)}$ et donc $p_C(I) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}$.

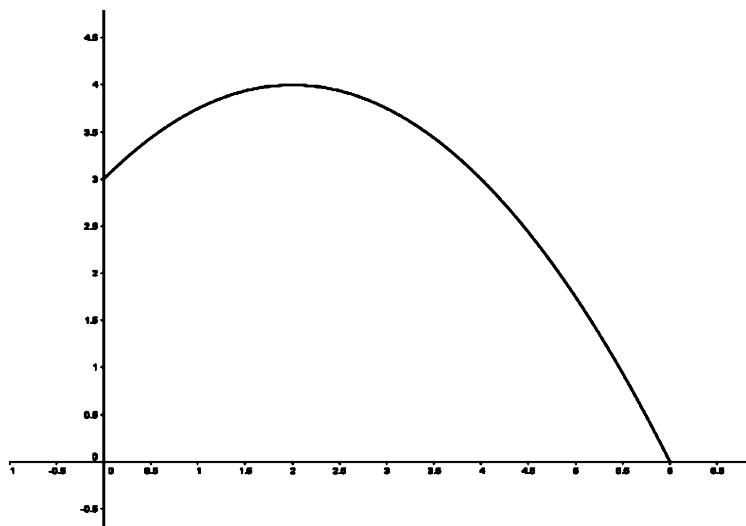
Extrait du sujet 4 2018

Dans la première partie du problème est expliqué comment un architecte construit une aire de détente de forme carrée ayant la même aire qu'une aire rectangulaire initiale. Le carré construit est noté

AHIG.

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré *AHIG* construit précédemment.

La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol. L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x;y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x , exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y , exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées $(0;3)$ et $(6;0)$.

Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

1. a. À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?

Le point d'abscisse 0 de la trajectoire correspond au point où la goutte d'eau sort de la colonne. C'est le point de coordonnées $(0;3)$ d'après l'énoncé qui indique que les distances sont représentées en mètre. Aussi l'eau est à 3 m de hauteur quand elle sort de la colonne, c'est l'ordonnée du point de coordonnées $(0;3)$.

b. À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?

Le point d'ordonnée 0 de la trajectoire correspond au point où la goutte d'eau retombe sur le sol. C'est le point de coordonnées $(6;0)$ d'après l'énoncé qui indique que les distances sont représentées en mètre. Aussi l'eau est à 6 m de du centre du carré quand elle retombe sur le sol, c'est l'ordonnée du point de coordonnées $(6;0)$.

c. Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.

La hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine est de 4 m. On peut le constater en traçant une droite horizontale d'équation $y = 4$ sur le graphique et observer que d'une part elle ne coupe la trajectoire qu'en un point et que d'autre part la courbe est strictement sous cette droite sauf en cet unique point commun.

La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;6]$ par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

où b et c sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.

a. Donner, en fonction de b et c , les images respectives de 0 et de 6 par la fonction f .

En remplaçant x par 0 dans la formule littérale $-\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ on obtient que $f(0) = c$.

En remplaçant x par 6 dans la formule littérale $-\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ on obtient que $f(6) = -9 + 6b + c$.

b. En déduire les deux nombres b et c .

D'après la question 1.a. $f(0) = 3$ et d'après 2.b. $f(0) = c$. On en déduit que $c = 3$.

D'après la question 1.b. $f(6) = 0$ et d'après 2.b. $f(6) = -9 + 6b + c$. Or $c = 3$ donc $0 = -9 + 6b + 3$.

Il vient $6 = 6b$ ce qui donne $b = 1$.

c. Prouver que pour tout x de l'intervalle $[0;6]$, on a : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$.

Puisque $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$, $c = 3$ et $b = 1$ il vient $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$. Aussi, le développement de l'expression $-\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$ en utilisant l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ donne

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 &= -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}4x - \frac{1}{4}4 + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et prouve que si x dans l'intervalle $[0;6]$, on a : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$.

d. En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine. Justifier.

Soit x un nombre réel différent de 2. Ainsi $x-2 \neq 0$ et comme le carré d'un nombre réel non nul est toujours strictement positif il vient $(x-2)^2 > 0 = (2-2)^2$.

Par conséquent si x est différent de 2 alors

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 < 4 = -\frac{1}{4}(2-2)^2 + 4 = f(2).$$

Ceci signifie que la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine est de 4-m est qu'elle est atteinte au point de la trajectoire distant de 2-m du centre du carré et seulement en ce point.

Solutions des exercices de la feuille 8

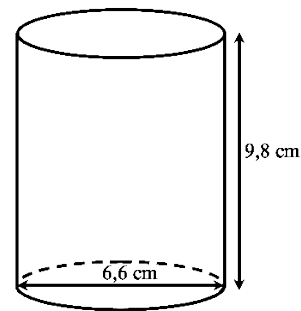
Extrait du sujet 2 2018 (PREMIÈRE PARTIE)

Dans cette partie, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

Partie A. Canette "classique"

On modélise une "canette classique" par le cylindre de révolution représenté ci-contre. Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.

Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre 6,6 cm et de hauteur 9,8 cm, est supérieur à 33 cL.



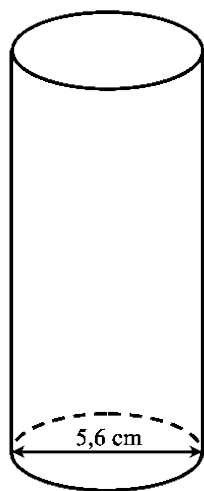
La canette classique est un cylindre de révolution. Son volume v_c (en cm^3) est donc égal au produit de l'aire de sa base b_c (en cm^2) multipliée par sa hauteur $h_c = 9,8$ cm. L'aire b_c (en cm^2) de la base

qui est un disque de diamètre $d_c = 6,6$ cm est égale à $b_c = \frac{1}{4}\pi \times d_c^2$. Il vient donc

$$\begin{aligned} v_c &= b_c \times h_c \\ &= \frac{1}{4}\pi \times d_c^2 \times h_c \\ &= \frac{1}{4}\pi \times 6,6^2 \times 9,8 \text{ cm}^3 \\ &= 335 \text{ cm}^3 \text{ à } 1 \text{ cm}^3 \text{ près par excès.} \end{aligned}$$

Le volume v_c de la canette est donc de 335 cm^3 à 1 cm^3 près par excès c'est à dire de $33,5 \text{ cL}$ à $0,1 \text{ cL}$ près par excès (car $1 \text{ cL} = 100 \text{ cm}^3$). Il est donc bien supérieur à 33 cL .

Partie B. Canette "slim"



Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites "slim", sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance. Le cylindre représenté ci-contre en modélise une. Son diamètre est de $5,6$ cm.

Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL .

La canette cylindre est un cylindre de révolution. Son volume v_s (en cm^3) est donc égal au produit de l'aire de sa base b_s (en cm^2) multipliée par sa hauteur h_s (en cm). L'aire b_s (en cm^2) de la base qui est un disque de diamètre $d_s = 5,6$ cm est égale à $b_s = \frac{1}{4}\pi \times d_s^2$. Il vient donc (avec v_s en cm^3 et h_s en cm)

$$\begin{aligned} v_s &= b_s \times h_s \\ &= \frac{1}{4}\pi \times d_s^2 \times h_s \\ &= \frac{1}{4}\pi \times 5,6^2 \times h_s. \end{aligned}$$

On souhaite que le volume v_s soit supérieur ou égal à 33 cL c'est à dire à 330 cm^3 . On a donc $330 \leq v_s = \frac{1}{4}\pi \times 5,6^2 \times h_s$ c'est à dire $\frac{4 \times 330}{\pi \times 5,6^2} \leq h_s$ (en cm). Or $\frac{4 \times 330}{\pi \times 5,6^2} = 13,4 \text{ cm}$ à $0,1 \text{ cm}$ par excès. Donc la plus petite hauteur possible pour que le volume de la canette slim soit d'au moins 33 cL est $13,4 \text{ cm}$ à $0,1 \text{ cm}$ par excès c'est à dire de 134 mm à 1 mm près par excès.

Partie C. Étude du lien entre le rayon de la base d'une canette de 33 cL et l'aire de son patron

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et h sa hauteur, en centimètre.

1. Vérifier que $h = \frac{330}{\pi r^2}$.

Le volume de la canette est de 33 cL c'est à dire de 330 cm^3 . Il est aussi égal au produit de l'aire de la base de la canette qui est πr^2 (avec le rayon de la base circulaire exprimé en cm) par sa hauteur h (exprimée en cm). On a donc $330 = \pi \times r^2 \times h$ et donc $h = \frac{330}{\pi r^2}$ (avec h et r en cm).

2. La figure ci-contre représente le patron du cylindre. Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur h et de longueur L , exprimée en centimètre. Exprimer la longueur L en fonction de r .

Pour faire la canette, le rectangle est accroché par ses deux côtés de longueur L au deux disques de rayon r . Le périmètre $p = 2\pi r$ de chacun des disques est donc égal à la longueur L de ces deux côtés. Il vient donc $L = 2\pi r$.

3. Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\frac{660}{r}$.

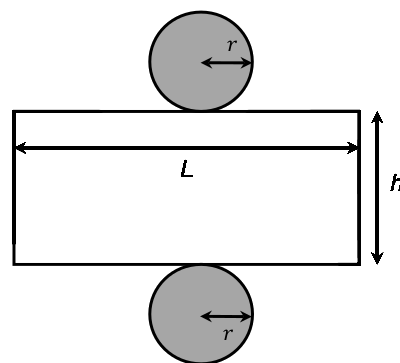
L'aire R (en cm^2) de la partie rectangulaire du patron exprimée en vaut le produit de sa hauteur h par sa longueur L . On a donc $R = h \times L$. Or $h = \frac{330}{\pi r^2}$ et $L = 2\pi r$ (h , L et r en cm). Donc $R = \left(\frac{330}{\pi r^2}\right) \times (2\pi r) \text{ cm}^2$ c'est à dire $R = \frac{330 \times 2}{r} \text{ cm}^2$ ou encore $R = \frac{660}{r} \text{ cm}^2$. L'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est bien $\frac{660}{r}$ (avec r en cm).

4. Exprimer l'aire totale A du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r .

Ici les longueurs sont exprimées en cm et les aires en cm^2 . Le patron est constitué du rectangle d'aire $\frac{660}{r}$ (d'après la question précédente) et des deux disques de rayon r et donc chacun d'aire πr^2 . L'aire totale A du patron est donc $A = \frac{660}{r} + 2\pi r^2 \text{ cm}^2$ (avec r en cm).

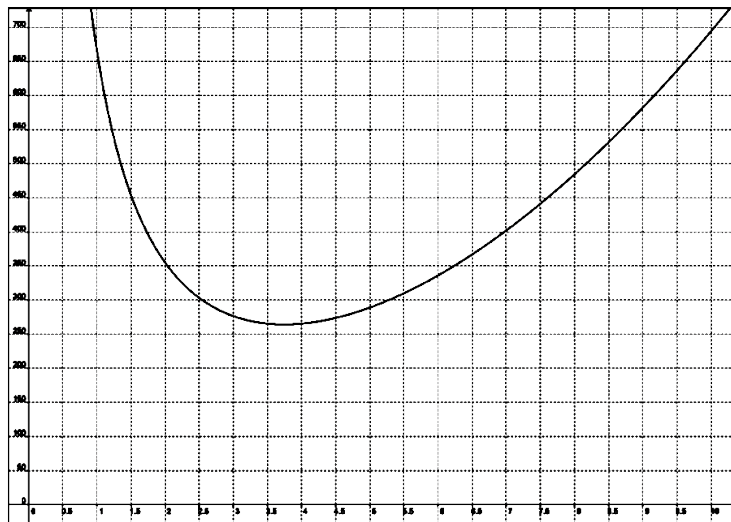
Partie D. Lecture graphique

On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r , exprimé en centimètre, et de contenance 33 cL. L'aire, exprimée en centimètre carré, de la surface de métal nécessaire est modélisée par la fonction f qui, à tout nombre r strictement positif, associe $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

La fonction f est représentée ci-dessous :



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

1. Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm ?

On lit l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm en recherchant l'ordonnée du point du graphe de la fonction f d'abscisse 1,5. On trouve que cette aire est de 450 cm^2 .

2. À quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300 cm^2 ?

On lit le rayon du cylindre correspondant à une aire de 300 cm^2 en recherchant l'abscisse du point du graphe de la fonction f d'ordonnée 300. On trouve deux valeurs pour le rayon du cylindre correspondant une aire de 300 cm^2 : 2,5 cm et 5,3 cm environ.

3. Déterminer laquelle de la canette "classique" ou de la canette "slim" utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.

La canette classique a un diamètre de 6,6 cm et donc un rayon de 3,3 cm. La canette slim a un diamètre de 5,6 cm et donc un rayon de 2,8 cm. Or d'après le graphe, la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette est une fonction décroissante du rayon quand on se restreint à l'intervalle compris entre 2,5 cm et 3,5 cm. Puisque $2,5 < 2,8 < 3,3 < 3,5$ la canette classique (de rayon 3,3 cm) utilise donc moins de surface de métal que la canette classique (de rayon 2,8 cm) pour sa réalisation.

On peut essayer d'être plus précis. Le graphe est tel qu'en abscisse 1 cm sur le graphe représente

1 cm de rayon et 1 cm en ordonnée représente 100 cm^2 . On observe d'une part que le point d'abscisse 3,3 cm et donc qui correspond à la canette classique a une ordonnée de 2,7 cm et représente donc 270 cm^2 de métal nécessaire à la réalisation de la canette classique et que d'autre part le point d'abscisse 2,8 cm et donc qui correspond à la canette slim a une ordonnée de 2,9 cm et représente donc 290 cm^2 de métal nécessaire à la réalisation de la canette slim. La canette classique (de rayon 3,3 cm) utilise donc moins de surface de métal que la canette classique pour sa réalisation (270 cm^2 pour la classique contre 290 cm^2 pour la slim).

4. À quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL.

La surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL correspond à un rayon r pour lequel $f(r)$ est minimum. Le graphe donne $r = 3,7$ cm environ pour un tel rayon. En effet la droite horizontale qui rencontre le graphe de f au point dont l'abscisse est $r = 2,7$ ne rencontre le graphe qu'en ce point et le graphe est strictement au dessus de cette droite sauf en cet unique point commun.

Extrait du sujet 2 2018 (EXERCICE 3)

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :

- étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.

On a donc $105^2 = 11025$.

1. Montrer comment calculer mentalement 45^2 .

Le nombre 45 compte 4 dizaines. On multiplie ce nombre de dizaines, 4, par l'entier qui lui succède, 5. On obtient le nombre de centaines de 45^2 , 20. Par conséquent 45^2 s'écrit 2025 qui est composé à gauche de son nombre de centaines, 20 et à droite de 25 comme le propose la méthode de calcul mental.

2. Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.

Établir la relation : $n^2 = 100d(d + 1) + 25$.

En l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 10d$ et $b = 5$ on obtient

$$\begin{aligned}n^2 &= (10d + 5)^2 \\&= (10d)^2 + 2 \times (10d) \times 5 + 5^2 \\&= 100d^2 + 100d + 25 \\&= 100d(d + 1) + 25.\end{aligned}$$

3. Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

Puisque $n^2 = 100d(d + 1) + 25$ le nombre $d(d + 1)$ est le quotient de la division euclidienne de n^2 par 100 et 25 le reste.

Il y a donc bien $d(d + 1)$ centaines dans n^2 comme l'affirme l'étape 1 de la technique de calcul mental exposée. Le nombre qui s'écrit en base dix en ajoutant 00 à droite de l'écriture en base dix du nombre $d(d + 1)$ est égal à $100d(d + 1)$.

D'après l'égalité $n^2 = 100d(d + 1) + 25$ en ajoutant 25 à ce nombre on atteint n^2 . Or ajouter 25 revient à remplacer dans l'écriture en base dix de $100d(d + 1)$ le 00 à droite par 25 comme dans l'étape 2 de la technique de calcul mental.

On vient ainsi de justifier les deux étapes de la technique de calcul mental qui permet de calculer le carré d'un nombre qui termine par 5.

4. Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

On applique la technique précédente à 35 qui vaut $10 \times 3,5$. On obtient $1225 = 35^2$ où 12 provient du calcul $12 = 2 \times 4 = 3 \times (3 + 1)$ qu'on fait car 35 à 3 dizaine. On en déduit que $12,25 = 3,5^2$ puisque $3,5^2 = \frac{1}{100} \times 35^2$.

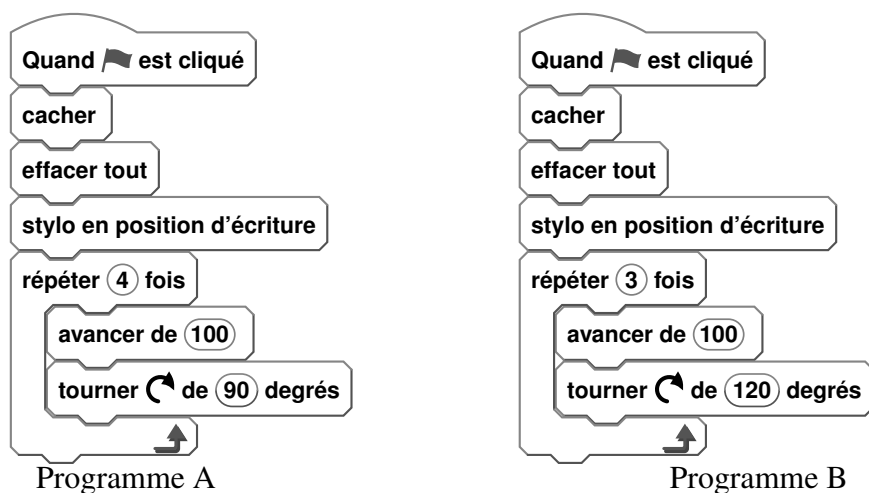
Solutions du premier exercice de la feuille 9 (programmation avec scratch pour la géométrie), du dernier exercice de la feuille 11 (programmation avec scratch pour l'arithmétique) et du dernier exercice de la feuille 12

Extrait du sujet 1 2019 (premier exercice de la feuille 9 (programmation avec scratch pour la géométrie))

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

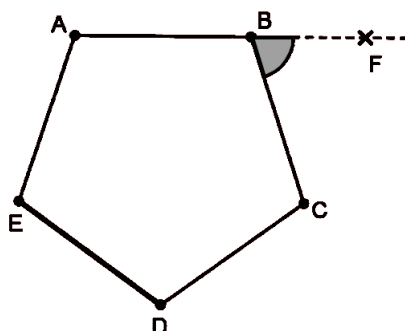
Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant : "La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $180n - 360$ ".

1) Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures tracées lorsqu'on exécute le programme A et le programme B.



Le programme A trace un carré de côté 100. Le programme B trace un triangle équilatéral de côté 100.

2) On considère le pentagone régulier $ABCDE$ ci-dessous. F est un point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite $[BA)$.



a) Démontrer que $\widehat{FBC} = 72^\circ$.

D'après l'énoncé, la somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $180n - 360$. Dans le cas du pentagone, $n = 5$ et donc la somme des angles du pentagone régulier vaut $180 \times 5 - 360^\circ$ c'est à dire 540° . Puisque le pentagone est régulier ses angles aux cinq sommets sont tous égaux. Puisque leur somme vaut 540° chacun vaut $\frac{540^\circ}{5}$ c'est à dire 108° . Par exemple $\widehat{CBA} = 108^\circ$. Puisque l'angle \widehat{FBA} est plat, il vaut 180° . Il est aussi égal à la somme de \widehat{FBC} et de $\widehat{CBA} = 108^\circ$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\widehat{FBC} &= \widehat{FBA} - \widehat{CBA} \\ &= 180 - 108^\circ \\ &= 72^\circ.\end{aligned}$$

Ceci prouve l'égalité $\widehat{FBC} = 72^\circ$.

b) En déduire les modifications à apporter au programme A pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.

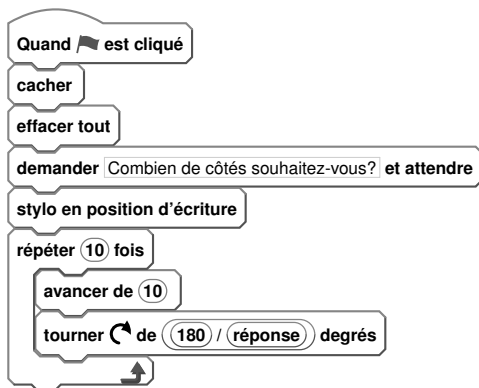
On va faire deux modifications au programme A pour qu'il trace un pentagone régulier.

- 1. On remplace "répéter 4 fois" par "répéter 5 fois". Ça permet de tracer 5 segments de longueur 100 et non seulement 4.
- 2. On remplace "tourner à droite de 90 degrés" par "tourner à droite de 72 degrés". Ça permet de tracer des segments qui tournent successivement de 72° , angle qui correspond à l'angle entre deux segments successifs d'un pentagone comme indiqué sur la figure de l'énoncé.

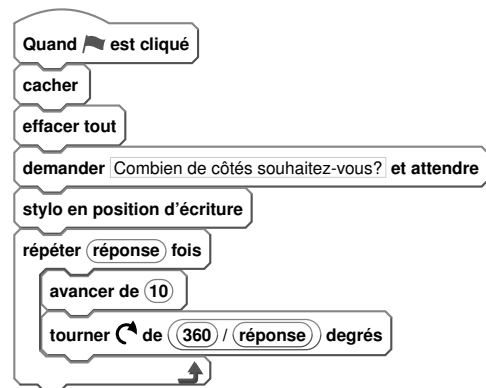
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle \widehat{FBC} est égal à 360° divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

3) On souhaite maintenant réaliser un programme qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves.

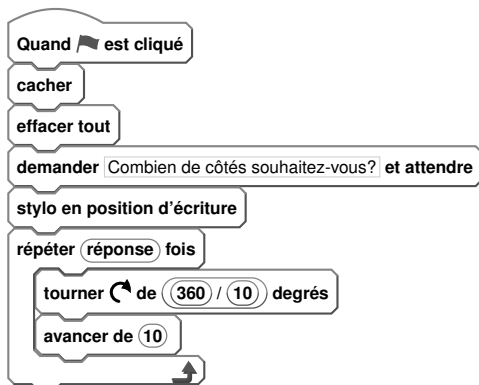
Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité? Préciser pourquoi les autres ne conviennent pas.



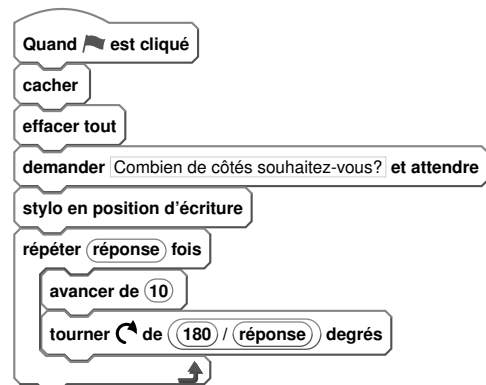
Programme 1



Programme 2



Programme 3



Programme 4

*Rappel : une fois que l'utilisateur a répondu à la question "Combien de côtés souhaitez-vous?", la valeur indiquée est stockée dans la variable **réponse**.*

Le programme 1 ne convient pas car il trace 10 segments de même longueur quel que soit le nombre n de côtés souhaité alors qu'il devrait en tracer n . Il ne convient pas non plus car il trace des segments tels que deux segments qui se suivent font un angle de $\frac{180}{n}^\circ$ alors que cet angle devrait être de $\frac{360}{n}^\circ$.

Le programme 2 convient. Il trace n segments de même longueur où n est le nombre de côtés souhaité et le tracé est tel que deux segments qui se suivent font un angle de $\frac{360}{n}^\circ$.

Le programme 3 ne convient pas car, bien qu'il trace le bon nombre n de segments de même longueur, le tracé est tel que deux segments qui se suivent font toujours le même angle de 36° quel que soit le nombre de côtés souhaités alors qu'il devrait être de $\frac{360}{n}^\circ$.

Le programme 4 ne convient pas car, bien qu'il trace le bon nombre n de segments de même longueur, il trace des segments tels que deux segments qui se suivent font un angle de $\frac{180}{n}^\circ$ alors que cet angle devrait être de $\frac{360}{n}^\circ$.

4) Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle

à l'écran ?

Pour tracer une figure qui ressemble à un cercle on va tracer un polygone qui compte un grand nombre de côtés. Le programme 2 le fait pourvu qu'on choisisse un grand entier lorsqu'on répond à la question "Combien de côtés souhaitez-vous?". Cependant, comme la longueur des côtés est toujours la même, 10, quel que soit le nombre de côtés demandés, plus ce nombre est grand plus le polygone est grand : le périmètre du polygone est $10 \times n$ ou n est le nombre de côtés demandé. Le polygone risque de sortir de l'écran si n est grand. Pour pallier ce défaut on peut remplacer dans le programme 2 l'instruction "avancer de 10" par "avancer de 50/réponse". Dans ce cas, quel que soit le nombre de côtés demandé, le périmètre du polygone est toujours 50.

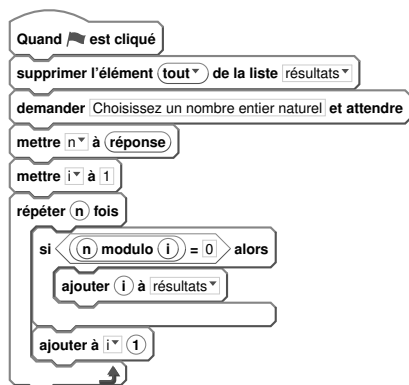
Extrait du sujet 5 2018 (dernier exercice de la feuille 11 (programmation avec scratch pour l'arithmétique))

On rappelle qu'une "liste" est une suite d'éléments, ici une suite de nombres. Par exemple, (17;245;32) est une liste de trois nombres.

On rappelle également que la fonction " a modulo b ", où a et b sont des entiers naturels, renvoie de reste de la division euclidienne de a par b .

Ainsi, "10 modulo 3" renvoie le nombre 1 car $10 = 3 \times 3 + 1$, et "35 modulo 7" renvoie le nombre 0 car $35 = 5 \times 7 + 0$.

1) Que va contenir la liste "résultats" une fois le programme exécuté, si l'utilisateur entre le nombre 4 ?



Lorsqu'on lance le programme la liste "résultats" est vide. Ensuite le nombre 4 est entré : $n = 4$. Enfin le programme effectue 4 fois une boucle en faisant varier un entier i de 1 à 4. Chaque fois que l'entier i est tel que 4 modulo i vaut 0 l'entier i est ajouté à la liste "résultats". C'est le cas pour i égal à 1, 2 ou 4. C'est pourquoi, après avoir entré 4, une fois le programme exécuté, la liste "résultats" contient

les nombres 1, 2 et 4.

2) L'utilisateur entre un nombre entier naturel non nul.

a) Que va contenir la liste "résultats" une fois le programme exécuté ?

La liste "résultats" contient tout les entiers naturels compris entre 1 et n et qui sont des diviseurs de n . En effet quand le programme est exécuté, la liste "résultats", initialement vide, est complétée par tout entier i compris entre 1 et n tel que n soit égal à 0 modulo i c'est à dire tel que le reste de la division euclidienne de n par i soit nul, ce qui signifie exactement que i est un diviseur de n .

b) Que peut-on dire sur le nombre entré par l'utilisateur si la liste ne contient qu'un nombre une fois le programme exécuté ?

Si la liste ne contient qu'un nombre une fois le programme exécuté, alors d'après la question précédente, n est un entier naturel non nul qui ne compte qu'un diviseur entier naturel. C'est donc 1 puisque tout autre entier naturel non nul admet au moins deux diviseurs entiers naturels, 1 et lui-même.

c) Que peut-on dire sur le nombre entré par l'utilisateur si la liste contient exactement deux nombres une fois le programme exécuté ?

Si la liste contient exactement deux nombres une fois le programme exécuté, alors d'après la question précédente, n est un entier naturel non nul qui compte exactement deux diviseurs entiers naturels. C'est donc, par définition, un nombre premier.

Extrait du sujet 1 2017 (dernier exercice de la feuille 12)

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Affirmation : *117 est un nombre premier.*

L'entier naturel $117 = 13 \times 3^2$ admet strictement plus que deux diviseurs entiers naturels, par exemple 1, 117, 3. Il n'est donc pas premier. L'affirmation est donc fausse.

2) a. Affirmation : *Pour n'importe quel nombre entier n , $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ est un multiple de 8.*

En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = n + 2$ et $b = n - 2$ il vient

$$\begin{aligned}(n + 2)^2 - (n - 2)^2 &= ((n + 2) - (n - 2))((n + 2) + (n - 2)) \\ &= 4(2n) \\ &= 8n\end{aligned}$$

qui établit que $(n + 2)^2 - (n - 2)^2 = 8n$ est un multiple de 8. L'affirmation est donc vraie.

b. Affirmation : *Pour n'importe quel nombre entier n, $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ est un multiple de 32.*

Prenons $n = 3$. Le calcul précédent donne $(3 + 2)^2 - (3 - 2)^2 = 8 \times 3 = 24$ qui n'est pas un multiple de 32. Il existe au moins un n (prendre $n = 3$) tel que $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ n'est pas un multiple de 32. L'affirmation est donc fausse.

3) Affirmation : *Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4.*

Puisque $30 = 2 \times 3 \times 5$ et que 2, 3 et 5 sont premiers les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30. Ainsi 30 qui est un entier naturel pair strictement supérieur à 7 est divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. Cet exemple prouve que l'affirmation est donc vraie.

4) Affirmation : *6 est l'unique solution de l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$.*

On a bien

$$(6 - 7)(6 + 4) = -10 = (6 - 7)(16 - 6)$$

et donc 6 est bien solution de $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$. Mais on a aussi

$$(7 - 7)(7 + 4) = 0 = (7 - 7)(16 - 7)$$

et donc 7 est aussi solution de $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$. Ainsi 6 n'est pas l'unique solution de l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$. L'affirmation est donc fausse.

5) On réduit respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle de 20% et 10%.

Affirmation : *L'aire du rectangle ainsi obtenu a diminué de 28%.*

On note l_1 la largeur du rectangle initial, L_1 sa longueur et A_1 son aire : $A_1 = l_1 \times L_1$.

On note l_2 la largeur du rectangle réduit, L_2 sa longueur et A_2 son aire : $A_2 = l_2 \times L_2$.

D'après l'énoncé $l_2 = l_1 - \frac{20}{100}l_1 = 0,8 \times l_1$ et $L_2 = L_1 - \frac{10}{100}L_1 = 0,9 \times L_1$.

Par conséquent $A_2 = l_2 \times L_2 = (0,8 \times l_1) \times (0,9 \times L_1) = 0,72 \times (l_1 \times L_1) = 0,72 \times A_1 = A_1 - \frac{28}{100}A_1$.

L'égalité $A_2 = A_1 - \frac{28}{100}A_1$ signifie que l'aire du rectangle initial a été réduite de 28%. L'affirmation est donc vraie.

6) Un rectangle a une largeur et une longueur qui mesurent respectivement 6 cm et 9 cm. On réduit la largeur de 20% et la longueur de 10%.

Affirmation : Le périmètre du rectangle ainsi obtenu a diminué de 15%.

On note l_1 la largeur du rectangle initial, L_1 sa longueur et p_1 son aire : $l_1 = 6$ cm, $L_1 = 9$ cm et $p_1 = 2(l_1 + L_1) = 30$ cm.

On note l_2 la largeur du rectangle réduit, L_2 sa longueur et p_2 son aire : $p_2 = 2(l_2 + L_2)$.

D'après l'énoncé d'une part $l_2 = l_1 - \frac{20}{100}l_1 = 0,8 \times l_1 = 0,8 \times 6$ cm c'est à dire $l_2 = 4,8$ cm et d'autre part $L_2 = L_1 - \frac{10}{100}L_1 = 0,9 \times L_1 = 0,9 \times 9$ cm c'est à dire $L_2 = 8,1$ cm.

Par conséquent $p_2 = 2(l_2 + L_2) = 2 \times (4,8 + 8,1)$ cm c'est à dire $p_2 = 25,8$ cm.

Puisque le périmètre p_1 du rectangle initial est $p_1 = 30$ cm, ce périmètre réduit de 15% est égal à $p_{réduit} = p_1 - \frac{15}{100}p_1 = 0,85 \times p_1$ c'est à dire $p_{réduit} = 0,85 \times 30$ cm ou encore $p_{réduit} = 25,5$ cm.

Finalement $p_2 = 25,8$ cm est différent de $p_2 = 25,5$ cm et donc le périmètre du rectangle initial n'a pas été réduit de 15%. L'affirmation est donc fausse.