Licence Sciences et Professorat des écoles
Troisième année
Université de Rennes 1

Mathématiques 2
Feuille 8

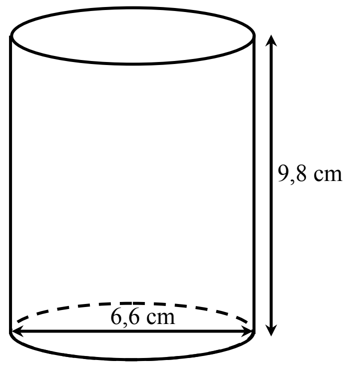
Extraits du sujet du groupement 2 2018

Dans cette partie, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

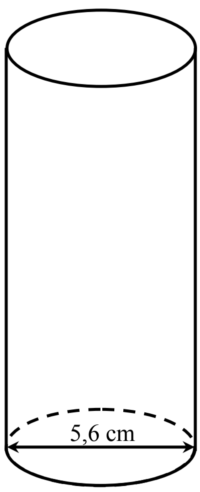
Partie A. Canette « classique »

On modélise une « canette classique » par le cylindre de révolution représenté ci-contre. Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.

Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre 6,6 cm et de hauteur 9,8 cm, est supérieur à 33 cL.



Partie B. Canette « slim »



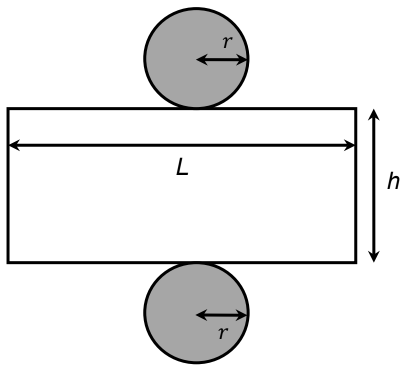
Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites « slim », sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance.
Le cylindre représenté ci-contre en modélise une. Son diamètre est de 5,6 cm.

Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL.

Partie C. Étude du lien entre le rayon de la base d'une canette de 33 cL et l'aire de son patron

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et *h* sa hauteur, en centimètre.

1. Vérifier que $h = \frac{330}{\pi r^2}$.
2. La figure ci-contre représente le patron du cylindre. Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur *h* et de longueur *L*, exprimée en centimètre. Exprimer la longueur *L* en fonction de r.
3. Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\frac{660}{r}$.
4. Exprimer l'aire totale A du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r.

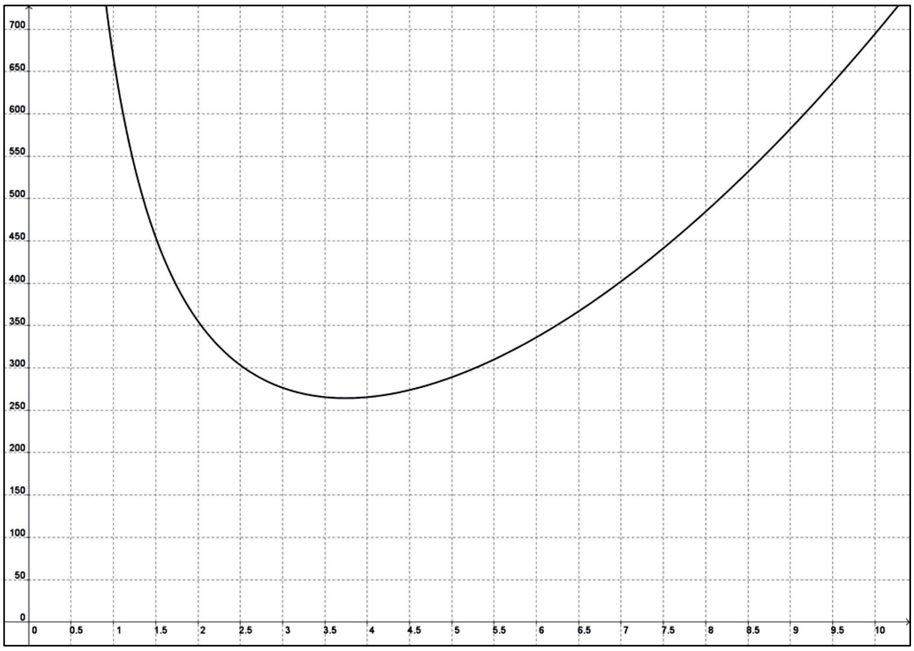


Cette figure n'est pas à l'échelle.

Partie D. Lecture graphique

On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en centimètre, et de contenance 33 cL. L'aire, exprimée en centimètre carré, de la surface de métal nécessaire est modélisée par la fonction f qui, à tout nombre r strictement positif, associe $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$.

La fonction f est représentée ci-dessous :



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

1. Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm ?
2. À quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300 cm^2 ?
3. Déterminer laquelle de la canette « classique » ou de la canette « slim » utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.
4. À quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL ?

EXERCICE 3 :

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :

- étape 1 : en calculant 10 × 11 = 110, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.

On a donc $105^2 = 11025$.

1. Montrer comment calculer mentalement 45^2.

2. Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.
Établir la relation :
$$n^2 = 100d(d + 1) + 25.$$

3. Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

4. Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?