Licence Sciences et Professorat des écoles
Troisième année
Université de Rennes 1

Mathématiques 2
Feuille 7

Exercice

1/ Soit k un entier naturel.

1.a. Développer $(3k+1)^2-1$ et $(3k+2)^2-1$.

1.b. En déduire que $(3k+1)^2-1$ et $(3k+2)^2-1$ sont des multiples de 3.

2/ Soit n un entier naturel.

2.a. Dire pourquoi il existe un entier naturel k et un entier r égal à 0, 1 ou 2 tels que $n = 3k+r$.

2.b. Vérifier l'égalité $n(n^2-1) = n^3-n$.

2.c. Montrer que n^3-n est un multiple de 3.

Extraits du sujet du groupement 5 2018

EXERCICE 2

Pour faire de la confiture, Grand-père ajoute à des mirabelles une masse de sucre égale aux quatre cinquièmes de la masse des fruits dénoyautés. La cuisson fait perdre 25% de la masse du mélange. Après la cuisson, la confiture est conditionnée dans des pots de 500 g. Les pots doivent être remplis pour une bonne conservation.

1. Aujourd'hui Grand-père a récolté des mirabelles ; après les avoir dénoyautées, il a obtenu 5 kg de fruits. Combien de pots de confiture peut-il remplir ?
2. La masse de confiture obtenue par le procédé suivi par Grand-père est-elle proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées ? Justifier votre réponse.
3. Grand-père souhaite obtenir 18 pots de confiture. Déterminer la masse m minimum de mirabelles dénoyautées que Grand-père devra prévoir. On arrondira la masse à l'hectogramme près.

EXERCICE 4 :

On a tracé un segment de 6,5 cm. À partir de ce segment, on cherche à construire un triangle en utilisant les valeurs obtenues par le lancer de deux dés cubiques équilibrés de couleurs différentes dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. La valeur obtenue par chacun des deux dés déterminera les longueurs, en centimètre, des deux autres côtés du triangle.

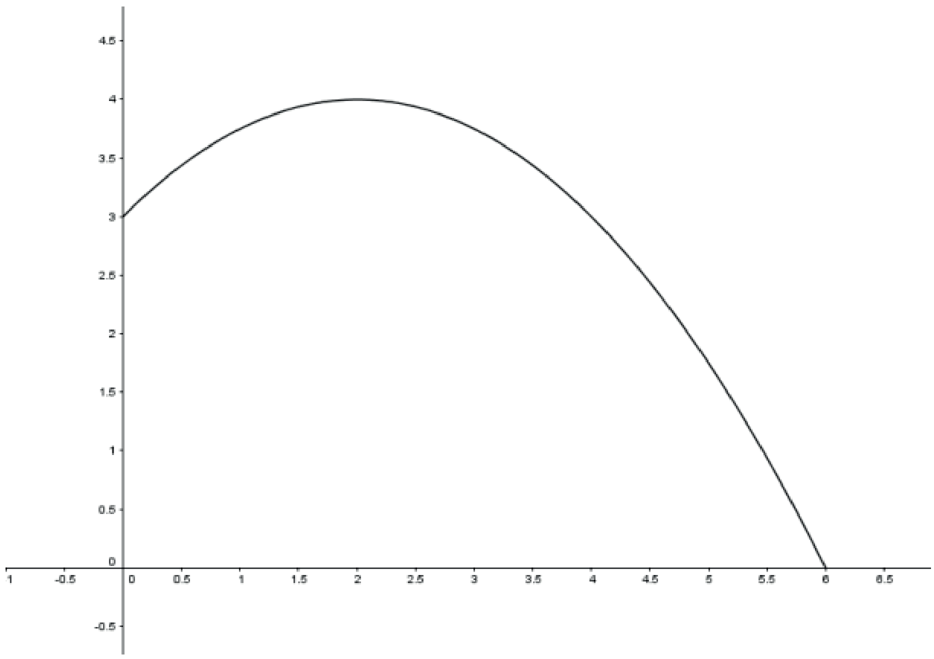
1. Le lancer des dés donne les nombres « 4 » et « 5 ». Construire le triangle que ce lancer permet d'obtenir.
2. Quelle condition doivent remplir les deux longueurs obtenues avec les dés pour que le triangle soit constructible ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire ?
4. On sait que l'on a obtenu un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire. Quelle est la probabilité pour qu'il soit isocèle ?

Extrait du sujet du groupement 4 2018

Dans la première partie du problème est expliqué comment un architecte construit une aire de détente de forme carrée ayant la même aire qu'une aire rectangulaire initiale. Le carré construit est noté AHIG.

B. AMÉNAGEMENT D'UNE FONTAINE

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré AHIG construit précédemment.
La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol. L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x\ ;\ y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x, exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y, exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées (0 ; 3) et (6 ; 0).
Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

1. **a.** À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?
b. À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?
c. Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.

2. La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle [0 ; 6] par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + b\,x + c$$

où b et c sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.
a. Donner, en fonction de b et c, les images respectives de 0 et de 6 par la fonction f.
b. En déduire les deux nombres b et c.
c. Prouver que pour tout x de l'intervalle [0 ; 6], on a : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$
d. En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine. Justifier.