Licence Sciences et Professorat des écoles
Troisième année
Université de Rennes 1

# Mathématiques 2
# Feuille 5

**1/** a. Vérifier que si $n \in \mathbf{N}$ alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. En déduire que si $a, r \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (a+pr) = \frac{(n+1)(a+(a+nr))}{2}$.

**2/** Vérifier que si $a, b \in \mathbf{R}$ alors $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

**3/** Vérifier que si $a, b \in \mathbf{R}$ alors $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

**4/** Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $ax^2 + bx + c = a\left((x+\alpha)^2 + \beta\right)$ quel que soit le réel $x$.

**5/** a. Étudier la fonction $f$ qui à $x$ réel associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c$ sont trois réels fixés.

b. Étudier la fonction $f$ qui à $x$ réel associe $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ où $a < b < c$ sont trois réels fixés.

**6/** On considère un véhicule dont l'accélération est majorée par 10 et la décélération est majorée aussi par 10. Calculer la distance maximale qu'il peut parcourir en 10 secondes sachant qu'en $t = 0$ et en $t = 10$ sa vitesse est nulle.

**7/** Est-il vrai que si $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ alors $x = 1$ (la réponse doit être argumentée) ?

**8/** Trouver tous les couples $(x, y)$ de réels qui vérifient $x^2 + y^2 < 1$ et $y = 2 + x$.

**9/** Soit $r$ un réel strictement positif. Montrer que si $a$ et $b$ sont des réels positifs tels que $a + b = 2r$ alors $ab \leq r^2$.

**10/** Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $r$ un réel strictement positif. Montrer que pour tout $a = (a_1, ..., a_n) \in [0, +\infty)^n$ tel que $a_1 + ... + a_n = nr$ on a $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} a_p \leq r^n$.

**11/** Soit $n$ un entier naturel non nul et $a, b$ deux réels. Montrer l'égalité $a^n - b^n = (a-b)\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p-1}\right)$.

**12/** Soit $n \in \mathbf{N}$ $a, b \in \mathbf{R}$. Montrer l'égalité $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} a^p b^{n-p}$.

**13/** Montrer que si $0 < a < b$ alors $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.

**14/** Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$.

**15/** Une personne dispose d'un compte rémunéré au taux annuel $\tau$. Le capital initial placé sur le compte est $K$ et chaque année la personne verse sur ce compte un montant $v$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note $K_n$ le capital disponible après $n$ années et donc $n$ versements.

a. Vérifier que $K = K_0$, $K_1 = (1+\tau) \times K_0 + v$ et plus généralement $K_{n+1} = (1+\tau) \times K_n + v$ si $n \in \mathbf{N}$.

b. Montrer que si $n$ est un entier naturel non nul alors

$$K_n = (1+\tau)^n K + \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} v.$$

**16/** Une personne emprunte un capital $K$ à rembourser par des versements annuels constants d'un montant $v$ selon un taux d'intérêt annuel égal à $\tau$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note $K_n$ le capital restant dû après $n$ années.

a. Vérifier que $K = K_0$, $K_1 = (1+\tau) \times K_0 - v$ et plus généralement $K_{n+1} = (1+\tau) \times K_n - v$ si $n \in \mathbf{N}$.

b. Montrer que si $n$ est un entier naturel non nul alors

$$K_n = (1+\tau)^n K - \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} v.$$

c. On suppose que le capital emprunté est remboursé en $N$ années. Calculer le montant total des intérêts versés.

**17/** a. Pourquoi de tous les rectangles d'un périmètre donné le carré est celui d'aire maximale ?

b. Pourquoi l'aire plane bordée par une courbe de longueur $2\pi$ est majorée par $\pi$ ?

**18/** Une encyclopédie indique d'une part qu'un mile fait 1609,344 mètres et d'autre part qu'un célèbre parc naturel a une surface de 200 kilomètres carrés et possède une frontière 30 miles. Est-ce possible (la réponse doit être argumentée) ?

**19/** Un capteur d'intrusion est susceptible de tomber en panne avant la visite d'entretien avec une probabilité p. Le système d'alarme est considéré comme fonctionnel si au moins la moitié de ses capteurs fonctionne. On suppose l'indépendance des capteurs par rapport au risque de panne. Pour quelles valeurs de p un système à deux capteurs à t-il une probabilité plus grande d'être fonctionnel qu'un système à quatre capteurs ?

**20/** Un sac contient des boules bleues, des boules jaunes et des boules rouges. Certaines de ces boules sont marquées, d'autres non. On tire une boule au hasard. La probabilité qu'elle soit bleue est 0,2 et celle qu'elle soit jaune est 0,7. La probabilité qu'elle soit marquée sachant qu'elle est bleue est 0,1. La probabilité qu'elle soit marquée sachant qu'elle est jaune est 0,2. La probabilité qu'elle soit marquée sachant qu'elle est rouge est 0,9. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge sachant qu'elle n'est pas marquée.

**21/** On choisit une case au hasard d'un tableau $2 \times 2$ formé de cases alternativement blanches et noires.

a. Vérifier que les probabilités de tomber sur une case noire, de tomber sur la première ligne, de tomber sur la première colonne sont chacune de $\frac{1}{2}$.

b. Vérifier que les probabilités de tomber sur la case noire de la première ligne, de tomber sur la case noire de la première colonne et de tomber sur la case intersection de la première ligne et de la première colonne sont chacune de $\frac{1}{4}$.

c. Montrer que les événements "tomber sur une case noire", "tomber sur la première ligne" et "tomber sur la première colonne" ne sont pas indépendants.

**22/** Une personne mise 1 euro pour pouvoir jouer à un jeu organisé par un casino. Le jeu consiste à lancer deux dès. On gagne 21 euros si on fait un double six. On gagne 4 euros si on fait un quatre et un cinq. La mise est remboursée si on fait un double qui n'est pas un double six. Quelle est l'espérance de gain pour le casino ?

**23/** Soit $n$ un entier naturel non nul. On lance une pièce jusqu'à ce qu'elle tombe sur face ou qu'il y ait eu $n+1$ lancers. On note $X$ la variable aléatoire qui correspond au temps d'arrêt. Si $p \in \{1,...,n\}$ alors $X = p$ lorsque la pièce tombe sur face la première fois au $p$-ième lancer. On a $X = n+1$ lorsque la pièce n'est jamais tombée sur face lors des $n$ premiers lancers.

a. Soit $p \in \{1,...,n\}$. Montrer que la probabilité que $X = p$ est $\frac{1}{2^p}$.

b. Montrer que l'espérance de $X$ est $E(X) = \sum_{p=1}^{n} p\frac{1}{2^p} + \frac{n+1}{2^n}$.

c. Soit $f$ la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $f(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p}x^p$. Montrer que $f$ est une fonction dérivable et que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$f(x) = \frac{x}{2}\frac{1-\frac{x^n}{2^n}}{1-\frac{x}{2}}.$$

d. Montrer que la dérivée $f$ vérifie la double égalité

$$f'(x) = \sum_{p=1}^{n} p\frac{1}{2^p}x^{p-1} = \frac{x}{2}\frac{(n-1)\frac{x^n}{2^{n+1}} - n\frac{x^{n-1}}{2^n} + \frac{1}{2}}{(1-\frac{x}{2})^2} + \frac{1}{2}\frac{1-\frac{x^n}{2^n}}{1-\frac{x}{2}}.$$

e. Vérifier que $E(X) = f'(1) + \dfrac{n+1}{2^n}$ et en déduire une nouvelle expression de $E(X)$.

**24/** On considère la variable aléatoire discrète $X$ à valeurs dans $\underline{\mathrm{N}}$ et qui vérifie $p(X = n) = \frac{1}{\exp(1)}\frac{1}{n!}$ si $n \in \mathbf{N}$. En admettant que si la fonction exponentielle est dérivable et vérifie $\exp(x) = \exp'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ si $x \in \mathbf{R}$ calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire $X$.