

Mathématiques 2
Feuille 4

- 1/ Pourquoi $3 < \pi < 4$ (la réponse doit être argumentée) ?
- 2/ Le coffre d'un distributeur automatique contient 100 euros en 126 pièces de 10 centimes (masse : 4,10 g), 20 centimes (masse : 5,74 g), 50 centimes (masse : 7,80 g), 1 euro (masse : 7,50 g) et 2 euros (masse : 8,50 g). La masse totale des 126 pièces est 854 g. Il y a autant de pièces de 10 centimes que de pièces de 50 centimes. Il y a autant de pièces de 1 euro que de pièces de 2 euros. Combien y-a-t-il de pièces de chaque type ?
- 3/ On admet que la densité des cheveux sur la tête d'une personne ne dépasse jamais 300 cheveux par cm^2 et que la surface du cuir chevelu d'une personne ne dépasse jamais la surface d'une sphère de 20 cm de rayon. Existe-t-il à Paris deux habitants qui ont exactement le même nombre de cheveux parmi les 2187526 que compte la ville (INSEE, 1er janvier 2017) (la réponse doit être justifiée) ?
- 4/ Soient des sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E . Montrer que si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ alors $B \subset C$.
- 5/ Soit E un ensemble et soient A et B des sous-ensembles de E . Montrer qu'il existe un sous-ensemble X de E tel que $A \cup X = B$ si et seulement si $A \subset B$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $Y \subset E$ tel que $A \cap Y = B$.
- 6/ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
- i) l'application f est surjective ;
 - ii) si $y \in F$ alors $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$;
 - iii) si $Y \subset F$ alors $f(f^{-1}(Y)) = Y$;
 - iv) si $Y \subset F$ et $f(f^{-1}(Y)) = \emptyset$ alors $Y = \emptyset$;
 - v) si $X \subset E$ alors $F \setminus f(X) \subset f(E \setminus X)$.
- 7/ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
- i) l'application f est injective ;
 - ii) si $x \in E$ alors $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$;
 - iii) si $X \subset E$ alors $f^{-1}(f(X)) = X$;
 - iv) si $X \subset E$ alors $f(E \setminus X) \subset F \setminus f(X)$;
 - v) si $X, X' \subset E$ et $f(X) \cap f(X') = \emptyset$ alors $X \cap X' = \emptyset$;
 - vi) si $X, X' \subset E$ alors $f(X) \cap f(X') = f(X \cap X')$.
- 8/ Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une injection de E dans F si et seulement s'il existe une surjection de F dans E .
- 9/ Montrer que $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ si A et B sont deux ensembles finis.
- 10/ Montrer que $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$ si A et B sont deux ensembles finis.
- 11/ Montrer que le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis A et B est égal au produit de leurs cardinaux : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- 12/ Montrer que si $p \in \mathbf{N}$ et si A est un ensemble à n éléments alors le cardinal de A^p est n^p : $\text{Card}(A^p) = \text{Card}(A)^p$.
- 13/ Montrer que si n et p sont des entiers naturels alors le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est égal n^p .
- 14/ Montrer que si n et p sont des entiers naturels alors le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements à p éléments, c'est à dire de sous-ensembles ordonnés à p éléments, d'un ensemble à n éléments.

15/ Montrer que si n est un entier naturel alors le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements à n éléments d'un ensemble à n éléments c'est à dire factorielle n (le nombre factorielle n est noté $n!$ et il vérifie $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$).

16/ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n .

17/ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que le nombre de façon d'ordonner les éléments d'un ensemble à n éléments est $n!$.

18/ Montrer que si n et p sont des entiers naturels tels que $p \leq n$ alors le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

19/ Calculer le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

20/ a. Soit $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ croissante. Montrer que l'application G_f qui à $x \in \{1, \dots, p\}$ associe $G_f(x) = f(x) + x - 1$ est une application strictement croissante de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n+p-1\}$.

b. Soit $g : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n+p-1\}$ strictement croissante. Montrer que l'application F_g qui à $x \in \{1, \dots, p\}$ associe $F_g(x) = g(x) - x + 1$ est une application croissante de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

c. Montrer que si f est comme dans a. alors $f = F_{G_f}$ et que si g est comme dans b. alors $g = G_{F_g}$.

d. Calculer le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

21/ Montrer que si n et p sont des entiers naturels tels que $p < n$ alors

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1)!)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

22/ L'affirmation suivante est-elle vraie (la réponse doit être argumentée)? Si, entre le 1er janvier 2018 et le 1er janvier 2019 le cours d'une action boursière a pris 60% et si entre le 1er janvier 2019 et le 1er janvier 2020 il a perdu 50% alors le cours de l'action le 1er janvier 2020 est plus élevé que le 1er janvier 2018.

23/ Un véhicule réalise un parcours en n étapes. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, l'étape i , d'une distance d_i est réalisée à la vitesse v_i . Donner, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, la durée t_i de l'étape i . Donner la distance totale du parcours, sa durée totale et sa vitesse moyenne.

24/ Un premier producteur vend des pommes au prix de 531 euros la tonne. La qualité de la production est telle qu'on ne peut espérer que parmi les pommes vendues seulement 90% sont de qualité acceptable. Un second producteur vend des pommes au prix de 551 euros la tonne. La qualité de la production est telle qu'on ne peut espérer que parmi les pommes vendues seulement 95% sont de qualité acceptable. Quel producteur une centrale d'achat a-t-elle intérêt de choisir? La réponse doit être argumentée.

25/ L'affirmation suivante est-elle vraie (la réponse doit être argumentée)? Dans un jeu de 52 cartes il y a 2598960 mains de 5 cartes différentes et parmi ces mains 624 contiennent un carré, 3744 contiennent un full (un brelan et une paire), 123552 contiennent une double paire, 54912 contiennent un brelan, 1098240 contiennent une paire, une double paire, 36 contiennent une quinte flush, 9180 contiennent une suite, 5112 contiennent une couleur.

26/ L'affirmation suivante est-elle vraie (la réponse doit être argumentée)? Parmi les mains de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes, 886656 contiennent au moins un as, 2023203 contiennent au moins un trèfle, 1940952 contiennent au moins un honneur, c'est à dire un valet, une dame ou un roi, 2221968 contiennent au moins un as ou un honneur, 2221968 contiennent au moins un as ou trèfle, 412980 contiennent au moins un as et au moins un honneur, 687891 contiennent au moins un as et au moins un trèfle.

27/ À la belote, jeu de carte qui se joue à quatre avec un jeu de 32, l'as vaut 11 points, le dix vaut 10 points, le roi vaut 4 points, la dame vaut 3 points, le valet vaut 2 points sauf à l'atout où il vaut 20, le neuf vaut 0 point sauf à l'atout où il vaut 14, le huit, le sept valent chacun 0 point et le dernier pli rapporte 10 points.

a. Quel est le minimum de points qu'une main de 8 cartes contient avant le premier tour?

b. Quelle est la probabilité qu'une main de 8 cartes ne contienne que le minimum de points avant le premier tour?

c. Quel est le nombre moyen de points qu'une main de 8 cartes contient avant le premier tour?