Licence Sciences et Professorat des écoles (L3)
Université de Rennes 1 - 2019-2020

Mathématiques 2
Contrôle continu 2 (durée théorique : 2 heures)

Principe de composition et de remise du travail réalisé Ce contrôle est à travailler en temps libre et le travail réalisé est à retourner par mail à jean-marie.lion@univ-rennes1.fr au plus tard le 15 avril à 12h15 en indiquant son nom et son prénom, en attestant sur l'honneur avoir réalisé ce travail sans solliciter l'aide d'une personne et en suivant l'une des options suivantes :

a - le devoir est rédigé à la main et scanné (si possible en un seul fichier PDF) ou alors photographié page par page et le fichier produit ou l'ensemble des fichier produits (attention, ce type de numérisation, mal maîtrisée, peut engendrer des fichiers trop gros pour être envoyés par mail) est envoyé par mail ou alors la production est déposée sur un espace de téléchargement et le lien de téléchargement est envoyé par mail ;

b - le devoir est tapé en utilisant un éditeur (simple ou sophistiqué) et le fichier produit (sans s'encombrer de l'utilisation d'un éditeur ou de macros pour les formules mathématiques si c'est trop compliqué) ou le fichier converti en PDF est envoyé par mail ou alors la production est déposée sur un espace de téléchargement et le lien de téléchargement est envoyé par mail ;

c - le devoir est tapé dans le corps du mail en n'utilisant que les caractères ordinaires du clavier d'ordinateur ou de téléphone.

Étape préliminaire obligatoire Vous devez **impérativement** écrire au début de votre travail une suite $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10})$ de dix entiers compris entre 1 et 6 obtenue de façon aléatoire. Vous engendrerez cette suite à l'aide de dix lancés d'un dé (à l'aide d'un dé réel ou d'un dé virtuel qu'on peut trouver en ligne) ou à l'aide de dix tirages avec remise d'étiquettes numérotées après avoir préparé six étiquettes numérotées de 1 à 6 qui serviront à ce tirage. Cette suite qui sera notée U dans tout le sujet doit être réellement le fruit du hasard : lorsqu'elle est générée, à chaque tirage ou chaque lancé les six nombres compris entre 1 et 6 doivent avoir tous une chance sur 6 de sortir (équiprobabilité). Cette suite U permet d'individualiser le sujet. Les termes de la suite U seront utilisés dans les exercices à résoudre. Chaque fois qu'un tel terme apparaît il faut le remplacer par sa valeur pour faire les calculs et répondre aux questions. Par exemple s'il vous est demandé "Combien compte de fruits une coupe composée de u_1 pommes et de u_2 poires ?" et si les termes u_1 et u_2 de votre suite U valent respectivement 3 et 5 alors vous pouvez répondre "Puisque la coupe est composée de 3 pommes et 5 poires elle compte $3+5$ fruits c'est à dire 8 fruits".

Exercice 1 (4 points) Toutes les réponses sont justifiées.

1. Calculer la moyenne m et la variance v des dix termes de la suite aléatoire U en utilisant les formules suivantes :

$$m = \frac{1}{10}(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}),$$
$$v = \frac{1}{10}\big((u_1-m)^2+(u_2-m)^2+(u_3-m)^2+(u_4-m)^2+(u_5-m)^2 + (u_6-m)^2+(u_7-m)^2+(u_8-m)^2+(u_9-m)^2+(u_{10}-m)^2\big).$$

2. Un sac contient dix jetons qui portent les numéros $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7,\ u_8,\ u_9,\ u_{10}$.

2.a. On pioche un jeton au hasard dans le sac. Pour chaque entier naturel compris entre 1 et 6 donner la probabilité d'avoir pioché un jeton qui porte ce numéro.

2.b. On fait deux tirages avec remise et on additionne les numéros obtenus. Pour chaque entier naturel compris entre 2 et 12 donner la probabilité pour que la somme obtenue soit égale à ce nombre.

3. On dispose d'une cible constituée d'un disque au centre duquel il y a une zone carrée. Le côté c du carré, exprimé en centimètre, est égal à quatre fois le plus petit des termes de la suite U. Le rayon r du grand disque, exprimé en centimètre, est égal au triple du plus grand des termes de la suite U.

Lorsqu'il joue, un débutant touche la cible avec une fléchette avec la probabilité $\frac{1}{u_1+u_2}$. Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

3.a. Un débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la partie extérieure à la partie carrée ?

3.b. Un débutant va lancer une fléchette. Quelle probabilité a-t-il de toucher la partie carrée de la cible ?

Exercice 2 (6 points) Toutes les réponses sont justifiées.

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Affirmation 1. La somme $(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8)$ possède exactement 8 diviseurs.

2. Affirmation 2. Si en raison d'une inflation constante des prix augmentent de $u_5\%$ par an, ils auront augmenté de $(u_4\times u_5)\%$ en u_4 années.

3. Affirmation 3. Si les dimensions d'un échantillon sont (u_6+u_7) fois plus petites que celles de la bouteille habituelle alors il y a $(u_6+u_7)^2$ fois moins de liquide dans l'échantillon que dans la bouteille habituelle.

4. Affirmation 4. Le PGCD de $(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)$ et 44 est 4.

5. Affirmation 5. On suppose qu'à l'occasion des soldes, le prix d'un article est réduit de $(2\times u_9)$ %. Si, avec carte de fidélité, une personne bénéficie de $(3\times u_{10})$ % de réduction supplémentaire sur le prix réduit, alors La réduction totale et de $(2\times u_9+3\times u_{10})$ %.

6. Affirmation 6. Soient a et b deux nombres entiers. Si le reste de la division euclidienne de a par $(6\times u_8)$ est 2 et si le reste de la division euclidienne de b par $(6\times u_8)$ est $(6\times u_8-2)$ alors le nombre $(a+b)$ est divisible par $(2\times u_8)$.

7. Affirmation 7. Dans une boucherie, on peut lire : "$(2\times u_3)$ steaks hachés achetés, 1 steak en plus gratuit". Un client demande 3 kg de viande hachée. Si, une fois la commande préparée, le boucher déclare "J'ai haché la viande que j'utilise pour les steaks, aussi je vous fais bénéficier de la promotion. Vous ne payez donc que $\frac{2\times u_3-1}{2\times u_3}\times 3$ kg de viande" alors le boucher se trompe.

8. Affirmation 8. Un cube dont la surface totale extérieure mesure $(100\times u_3+10\times u_6+u_9)$ cm^2 possède un volume inférieur à 50 cL.

Exercice 3 (1 point) Toutes les réponses sont justifiées.

Une vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de $(100\times u_7)$ m, jusqu'à un col culminant à une altitude de $(1000+100\times u_5+10\times u_3)$ m. Elle a le choix entre emprunter une route goudronnée de $(22+u_9)$ km ou une piste en terre 2 km plus longue.

1. La semaine dernière, elle a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h $(10+u_1)$ min, elle est arrivée au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-elle roulé ?

2. Cette semaine elle a pris la piste en terre. Elle constate qu'elle a mis 1 h $(50+u_7)$ min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

Exercice 4 (2 points) Toutes les réponses sont justifiées.

On admet que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 3×10^8 m/s.

1. Une unité astronomique (1 UA) est égale à la distance moyenne Terre-Soleil ; elle vaut 150 millions de kilomètres. Calculer le temps, exprimé en minute et seconde, nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parcourir u_8 UA dans le vide.

2. Une année-lumière (1 AL) est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année julienne (c'est-à-dire 365,25 jours). Calculer une valeur approchée, en kilomètre, de $(2\times u_4)$ années-lumières.

3. Dans une galaxie virtuelle, la planète la plus éloignée du centre de la galaxie est à une distance moyenne de ce centre de $(u_2+\frac{u_{10}}{10})$ milliards de kilomètres.

a. Exprimer cette distance en UA.

b. Si on réalisait une maquette de cette galaxie dans laquelle la planète la plus éloignée est placée à un mètre du centre de la galaxie, à quelle distance du centre de la galaxie faudrait-il placer une planète distante dans la réalité de u_6 UA de ce centre ? On donnera le résultat arrondi au millimètre.

Exercice 5 (1,5 points) Toutes les réponses sont justifiées.

Trois personnes ont des fortunes diverses. Elle est de F_1 euros pour la première, de F_2 euros pour la deuxième et de F_3 euros pour la troisième. Voici ce qu'on sait de ces fortunes.

Le montant F_1 vaut u_1 millions d'euros auxquels il faut ajouter u_2 fois F_2 et u_3 fois F_3.

La montant F_2 multiplié par u_4 vaut u_5 millions d'euros auxquels il faut ajouter $(u_4 - 1)$ fois F_3.

La montant F_3 multiplié par u_4 vaut u_6 millions d'euros auxquels il faut ajouter $(u_4 + 1)$ fois F_2.

Calculer les montants F_1, F_2 et F_3 des fortunes des trois personnes.

Exercice 6 (1,5 points) Toutes les réponses sont justifiées.

Pour peser certains oxydes métalliques, un artisan utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer. Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.

Au repos, le ressort du peson a pour longueur $(4 \times u_{10})$ cm. Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur $(4 \times u_{10} + \frac{3}{10} \times u_8)$ cm. Chaque fois que l'on ajoute 10 g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de $(\frac{3}{10} \times u_8)$ cm.

1. Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de $(3 \times u_6 \times u_4)$ g ?

2. L'artisan constate que le ressort mesure $(7 \times u_{10} + u_2)$ cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?

3. La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ?

Exercice 7 (2 points) Toutes les réponses sont justifiées.

On considère l'algorithme suivant :
- choisir un nombre a quelconque ;
- le multiplier par $(1 + u_3)$;
- ajouter $(2 \times u_5)$ à ce produit ;
- mettre le tout au carré ;
- ajouter $(-1)^{u_7} \times u_9$;
- écrire le résultat.

1. Donner la formule qui donne le nombre obtenu en fonction du nombre de départ a.

2. Déterminer (s'ils existent) tous les nombres a qui permettent d'obtenir un résultat égal à 0.

3. Déterminer (s'ils existent) tous les nombres a qui permettent d'obtenir un résultat égal à -1.

4. Déterminer la plus petite valeur possible du résultat.

Exercice 8 (2 points) Toutes les réponses sont justifiées.

Dans une loterie, 1000 billets sont vendus et les billets gagnants se répartissent de la façon suivante :
- 2 billets permettent de gagner un téléphone ;
- $(4 \times u_1 + u_2)$ billets permettent de gagner un bon de réduction de 100 euros ;
- $(5 \times u_1 + u_2 + u_3)$ billets permettent de gagner un bon de réduction de 50 euros ;
- $(8 \times (u_1 + u_2 + u_3 + u_4))$ billets permettent de gagner un porte-clés.

1. Quelle est la probabilité de gagner un bon de réduction (peu importe la somme) si l'on achète un billet ?

2. Une personne apprend qu'elle a gagné un lot. Quelle est la probabilité que ce soit un téléphone ?

3. En plus de l'achat des bons de réduction dans plusieurs magasins, l'organisateur de la loterie dépense 200 euros pour chaque téléphone et 0,50 euros pour chaque porte-clés.

a. À quel prix doit-il vendre les billets de loterie, pour être sûr que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?

b. S'il souhaite vendre chaque billet 1 euro, combien doit-il vendre de billets (en ne modifiant pas le nombre de billets gagnants et les lots correspondants) pour être assuré que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?