

Mathématiques 2

Contrôle continu 1 (durée : 45 min (tiers-temps 60 min)+15 min pour numériser et envoyer)

Principe de composition et de remise du travail réalisé

1/ Le sujet, disponible sur l'équipe L3 SciPE Maths 2 de Teams en début d'épreuve, est constitué d'exercices auxquels est ajoutée une question en lien avec le polycopié. Cette dernière ne compte que comme bonification et il n'est pas nécessaire d'y répondre pour avoir la note maximale.

2/ Le sujet est décliné de façon à ce que chaque exercice soit individualisé.

3/ Le contrôle dure 45 min (tiers-temps 60 min)+15 min pour numériser et envoyer.

4/ Chacun planche sur son sujet en utilisant toutes les ressources souhaitées.

5/ Le travail ainsi réalisé est retourné à jean-marie.lion@univ-rennes1.fr dans les temps.

6/ Il doit être indiqué dans le mail d'envoi du travail une phrase du type "J'atteste sur l'honneur avoir réalisé ce travail sans solliciter l'aide d'une personne."

Étape préliminaire obligatoire Vous devez **impérativement** écrire au début de votre travail une suite $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10})$ de dix entiers compris entre 1 et 6 obtenue de façon aléatoire. Vous engendrez cette suite à l'aide de dix lancés d'un dé (à l'aide d'un dé réel ou d'un dé virtuel qu'on peut trouver en ligne) ou à l'aide de dix tirages avec remise d'étiquettes numérotées après avoir préparé six étiquettes numérotées de 1 à 6 qui serviront à ce tirage. Cette suite qui sera notée U dans tout le sujet doit être réellement le fruit du hasard : lorsqu'elle est générée, à chaque tirage ou chaque lancé les six nombres compris entre 1 et 6 doivent avoir tous une chance sur 6 de sortir (équiprobabilité). Cette suite U permet d'individualiser le sujet. Les termes de la suite U seront utilisés dans les exercices à résoudre. Chaque fois qu'un tel terme apparaît il faut le remplacer par sa valeur pour faire les calculs et répondre aux questions. Par exemple s'il vous est demandé "Combien compte de fruits une coupe composée de u_1 pommes et de u_2 poires ?" et si les termes u_1 et u_2 de votre suite U valent respectivement 3 et 5 alors vous pouvez répondre "Puisque la coupe est composée de 3 pommes et 5 poires elle compte $3 + 5$ fruits c'est à dire 8 fruits".

1/ (5 points)

Deux équipes A et B engagent respectivement $10 + u_1$ et $10 + u_1 + u_2$ personnes dans une course.

1. Le temps moyen des personnes de l'équipe A de 30 min et celui des personnes de l'équipe B est de 32 min. Que peut-on dire du temps moyen de l'ensemble des personnes des équipes A et B .

2. Le temps médian des personnes de l'équipe A de 28 min et celui des personnes de l'équipe B est de 31 min. Que peut-on dire du temps médian de l'ensemble des personnes des équipes A et B .

3. Donner un temps majorant les temps des personnes de l'équipe A .

4. On suppose que le temps le moins rapide des membres de l'équipe B est de 35 min. Donner un nombre majorant le nombre de membres de l'équipe B dont le temps est inférieur à 20 min

2/ (5 points)

Trouver cinq entiers naturels qui vérifient les conditions suivantes :

ils sont tous différents ;

1/ l'un d'eux est égal à la moyenne des quatre autres et à la demi-somme du plus petit et du plus grand ;

2/ la différence entre le plus grand et le plus petit vaut $2u_3$;

3/ la différence entre la somme des deux plus grands et celle des deux plus petits vaut $2(u_3 + u_4)$;

4/ le plus grand de ces cinq entiers est un nombre premier.

Justifier la réponse.

3/ (5 points)

Dire en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1/ Le produit de deux entiers non multiples de $u_5 + u_6$ est un entier non multiple de $u_5 + u_6$ (on admettra

que si un nombre premier divise le produit de deux entiers il divise l'un des entiers).

2/ La vitesse moyenne d'un voilier qui parcourt 10 milles à $3 \times u_7$ noeuds (1 noeud=1 milles/heure) puis 10 milles à $5 \times u_7$ noeuds est $4 \times u_7$ noeuds.

3/ Soient A , B et C trois associations d'une ville de $100 \times (u_8 + u_9)^3$ habitants. Si, parmi ces habitants,

- chaque association compte $100 \times (u_8 + u_9)^2$ adhérents,

- A et B ont $100 \times (u_8 + u_9)$ membres en commun,

- B et C ont $100 \times (u_8 + u_9)$ membres en commun,

- C et A ont $100 \times (u_8 + u_9)$ membres en commun,

alors 100 habitants sont membres des trois associations en même temps.

4/ (5 points)

On considère le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre a quelconque ;

- le multiplier par $u_9 + u_{10}$;

- ajouter $u_5 + u_6$ à ce produit ;

- mettre le tout au carré ;

- écrire le résultat.

1. Déterminer le nombre obtenu si le nombre de départ est 0, -1 et $\frac{1}{2}$.

2. Donner l'expression du nombre obtenu en fonction du nombre de départ a .

3.a. Déterminer tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 0.

3.b. Déterminer tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 4.

3.c. Déterminer tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à -1 .

5/ (question bonus de 2 points)

Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ un nombre réel différent de 1 et soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel. Montrer

$$\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$