Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2023-2024

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 4 (CMP4)

Dénombrement. Géométrie élémentaire

Résumé des séances

10/01. On explique que le dénombrement consiste à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini. Ceci nous entraîne à expliquer ce que signifie compter et ce qu'est un ensemble fini.

Il est nécessaire d'évoquer tout d'abord l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels ($\mathbf{N} = \{0, 1, 2...\}$) et les sous-ensembles de la forme $\{0, 1, 2, ..., n\}$ de $\mathbf{N}$.

On définit un ensemble fini (non vide) comme un ensemble E pour lequel il existe un entier naturel n tel que E soit en bijection avec $\{0, 1, 2, ..., n\}$. On définit alors $n+1$ comme le cardinal de E c'est à dire comme le nombre d'éléments que possède E. Il est indiqué que le cardinal du vide est 0.

Pour saisir cette définition d'ensemble fini on précise ce que sont une application, une injection, une surjection une bijection, la composée d'applications, la réciproque d'une bijection (dite aussi inverse pour la composition). On explique pourquoi une bijection étant donnée, il existe une unique réciproque.

On montre que si E est un sous-ensemble de $\{0, 1, 2, ..., n\}$ alors E possède au plus $n+1$ éléments. Après avoir précisé que la composée de deux bijections est une bijections on montre que si E est un ensemble fini à $n+1$ éléments et F un ensemble alors il existe une bijection entre E et F si et seulement si F possède $n+1$ éléments.

On introduit la notion de p-liste d'un ensemble E qui possède n éléments. C'est une liste $(x_1, ..., x_p)$ formée de p éléments de E dont certains peuvent se répéter. On montre par récurrence sur p que le nombre de p-listes d'un ensemble E qui possède n éléments est n^p.

17/01. On montre que si E et F sont des ensembles finis à n et m éléments il existe m^n applications de E dans F.

On définit une permutation d'un ensemble fini comme étant une bijection de cet ensemble dans lui-même et on illustre cette notion par une application de $\{0, 1, 2, 3\}$ qui est une bijection et une autre qui n'est ni injective ni bijective.

On montre que le nombre de permutations d'un ensemble fini E qui possède n éléments est égal au nombre de bijections de $\{1, ..., n\}$ dans E et vaut $n!$. On explique que ce nombre est le nombre de façons d'ordonner un ensemble à n éléments.

On applique ça au cas d'un jeu de 52 cartes. On vérifie qu'il y a plus de 10^{64} façons de l'ordonner alors qu'on obtient moins de 10^{47} battages de cartes si 10 milliard d'individus battent pendant 15 milliard d'années, chacun un jeu de carte, à la fréquence de 10^{19} battages par seconde et par individu.

On introduit la notion d'arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments et on montre que ce nombre noté A_n^p vaut $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Au cours de la séance on discute aussi de la définition d'une application en terme de graphe et on explique que ce point de vue permet de donner un sens à une application du vide dans un ensemble.

24/01. On étudie le jeu de taquin. On compte combien de façons on peut placer les 15 pièces d'un taquin 4×4. Ce nombre varie de $15!$ à $15!\times 16\times 2\times 4$ suivant la façon dont on limite les configurations. Ensuite on étudie les configurations atteignables, c'est à dire les configurations qui peuvent être obtenues en faisant des déplacements autorisés des pièces. Au cours de cette étude on introduit par l'exemple, la notion de signature d'une permutation et on explique que ce nombre permet de caractériser configurations atteignables.

On introduit la notion de combinaison (les C_n^p pour les tenants de la tradition ou les $\binom{n}{p}$ pour les tenants de la modernité). On établit de différentes façons (algébrique, combinatoire) que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et que $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

On explique de façon combinatoire pourquoi $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Le triangle de Pascal des C_n^p est présenté.

On explique deux deux façons pourquoi $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + ... + C_n^n$, une façon combinatoire et une façon algébrique utilisant le binôme de Newton c'est à dire la formule non démontrée :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

Cette séance est aussi l'occasion d'expliquer la bijection qui existe entre l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E à n éléments et l'ensemble de des applications de E dans $\{0,1\}$.

31/01. On donne à partir de $(\mathbf{R},+\times)$ la définition d'un groupe commutatif et d'un corps commutatif. On donne comme autres exemples $(\mathbf{Q},+,\times)$, $(\mathbf{C},+\times)$ ainsi que $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},+,\times)$ en explicitant pour ce dernier les deux lois.

On introduit la notion d'espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$) en indiquant une définition qui contient une condition inutile car pouvant se déduire des autres (si $u\in E$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ alors $\lambda\cdot u = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$) [L'inutilité seulement annoncée provient des observations suivantes. On a $0\cdot u = (0+0)\cdot u = 0\cdot u + 0\cdot u$ donc $0\cdot u = 0_E$. On a aussi $\lambda\cdot 0_E = \lambda\cdot(0_E+0_E) = \lambda\cdot 0_E + \lambda\cdot 0_E$ et donc $\lambda\cdot 0_E = 0_E$. De plus si $\lambda\cdot u = 0_E$ et $\lambda\neq 0$ alors $u = 1\cdot u = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\cdot u = \frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot u) = \frac{1}{\lambda}\cdot 0_E = 0_E$.].

On donne comme exemple les espaces vectoriels des applications définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbf{R}$, l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients réels et l'ensemble $\mathbf{R}^n$. Chaque fois les lois (interne $(+)$ et externe $(\cdot)$) sont précisées.

On explique ce qu'est le plan affine $\mathbf{R}^2$ (les éléments de $\mathbf{R}^2$ sont vus comme des points). On introduit la notion de translation et on montre que l'ensemble des translations muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif. On explicite la relation entre translations et vecteurs de $\mathbf{R}^2$ considéré cette fois-ci comme espace vectoriel. On introduit la notion de paires de couples équipollents.

07/02. Après avoir établi en détails que dans un espace vectoriel E l'égalité $\lambda\cdot u = 0_E$ où $\lambda\in\mathbf{R}$ et $u\in E$ entraîne $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$ on introduit les notions de combinaison linéaire, famille liée, famille libre, famille génératrice et base qu'on illustre avec des exemples :
- (x) famille libre et génératrice (base) de $\mathbf{R}$ si $x\neq 0$;

- $((u,v))$ famille libre de $\mathbf{R}^2$ si $(u,v) \neq (0,0) = 0_{\mathbf{R}^2}$;
- une famille de deux vecteurs colinéaires de $\mathbf{R}^2$ est liée ;
- $((3,2),(4,3))$ famille libre et génératrice (base) de $\mathbf{R}^2$;
- $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où $f_n(x) = 1$ si $x = n$ et 0 si non est une famille libre de l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

14/02. La séance est entière consacrée à la préparation du contrôle CMP3-CMP4.

Les exercices suivants sont traités.

* (au contrôle) Donner un encadrement du nombre π en le justifiant.

* (au contrôle) Soit $x, y \in \mathbf{R}$ et $z = x + iy \in \mathbf{C}$. On suppose que $z \notin (-\infty, 0]$ c'est à dire que z n'est pas un réel négatif ou nul.

1/ Montrer que les racines réelles $\sqrt{x^2+y^2}$ et $\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ sont bien définies.

2/ On pose $X = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}}$, $Y = \dfrac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}$ et $Z = X + iY$. Montrer que Z est bien défini et calculer Z^2.

* (au contrôle) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - (3+i)z + (4+3i) = 0$ d'inconnue z.

* (au contrôle) Soit f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définie par $f(n) = 2n$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

- (hors contrôle) Montrer qu'on a plus de chance de donner de façon ordonnée les deux premières d'un classement de dix personnes que de façon non ordonnée les trois premières.

- (hors contrôle) On dispose d'un jeu de cinquante deux cartes.

1/ Combien existe-t-il de mains différentes composées de quatre cartes ?

2/ Combien existe-t-il de mains de dix cartes qui contiennent deux as et trois valets exactement ?

* (au contrôle) Si $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$ on pose $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

1/ Montrer que $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

2/ Montrer que si $p < \dfrac{n}{2}$ alors $\dbinom{n}{p} \leq \dbinom{n}{p+1}$.

3/ Montrer que si p_0 est la paartie entière de $\dfrac{n}{2}$ alors $\dbinom{n}{p} \leq \dbinom{n}{p_0}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $0 \leq p \leq n$.

* (au contrôle) On considère les vecteurs $u = (1,2)$, $v = (2,-1)$, $w = (5,5)$.

1/ Montrer que (u,v) est une base de $\mathbf{R}^2$.

2/ Trouver des réels λ et μ tels que $\lambda u + \mu v = w$.

21/02. La séance est consacrée au premier contrôle.

La première partie de la séance de CMP3 est consacrée à CMP4. On y définit les notions de vecteurs liés, de droites vectorielles, d'espaces affines, d'espaces vectoriels directeurs de droites affines, de translations et de droites affines. Les exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ sont donnés pour illustrer les notions affines et vectorielles. On traite aussi un exemple explicite avec dessin d'une droite affine de $\mathbf{R}^2$ vu comme espace affine, de son espace vectoriel directeur qui est une droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ vue comme espace vectoriel et d'une translation de cette droite affine.

13/03. Les notions d'espaces vectoriels et d'espaces affines euclidiens sont introduites. On étudie le produit scalaire défini sur $(\mathbf{R}^n,+,\cdot)$ par $< u,v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ si $u = (u_1,...,u_n)$ et $v = (v_1,...,v_n)$ et la notion de norme euclidienne associée. On donne les premières propriétés du produit scalaire. On démontre l'égalité

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2 < u,v > + ||v||^2$$

et l'inégalité

$$< u,v > \leq ||u|| \times ||v||$$

ainsi que l'inégalité triangulaire

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

On définit la notion de distance euclidienne (d'espace affine euclidien) et explique que l'inégalité triangulaire pour les distances euclidiennes,

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C),$$

est un corollaire de l'inégalité triangulaire pour les normes euclidiennes.

On explique comment trois points A, B et C de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une famille libre définissent un plan affine dont on donne une représentation paramétrique. On explique ce qu'est une équation cartésienne d'un tel plan et on construit un système dont la résolution permet de trouver une telle équation cartésienne.

20/03. La séance est consacrée à la poursuite du cours CMP3. On s'intéresse principalement à la notion de dérivée. Après avoir introduit la notion de dérivée on établit la dérivabilité de fonctions comme x, x^2, x^n, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$... On donne quelques propriétés algébriques de la dérivation et on calcule certaines dérivées en utilisant ces propriétés.

27/03. Les séances CMP3 et CMP4 sont mélangées. Concernant CMP4 on aborde la notion de produit vectoriel, celle d'équation cartésienne d'un plan affine et on rappelle quelques formules de trigonométrie. On évoque aussi la question d'orientation en expliquant mathématiquement pourquoi pour passer d'une configuration d'horloge à 9h30 à une configuration à 10h00 en faisant tourner les aiguilles librement alors nécessairement les aiguilles se trouvent alignées à un moment donné.

03/04. Les séances CMP3 et CMP4 sont mélangées. Concernant CMP4 on aborde la partie du deuxième contrôle qui portera sur CMP4. En particulier on traite des points suivants.

1/ On explique comment construire à la règle et au compas sur une feuille dont la longueur 1 est déjà tracée la longueur $\cos(\frac{\pi}{5})$ sachant que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

2/ On considère l'espace vectoriel $E = \{P(x) = a + bx + cx^2 | a,b,c \in \mathbf{R}\}$ des fonctions polynomiales réelles de degré au plus 2 muni de l'addition et de la multiplication par les réels,
- on montre que la famille $(1,x,x^2)$ est une famille génératrice de E,
- on calcule $P(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$ si $P \in E$,
- on montre que si P est la fonction nulle alors $a = b = c = 0$,
- on montre que la famille $(1,x,x^2)$ est libre,
- on trouve, si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, les $P \in E$ tels que $P(-1) = \alpha$ et $P(1) = \beta$.

3/ On considère $O = (0,0)$, $A = (9,0)$, $B = (9,3)$, $C = (8,6)$ et $D = (7,7)$ des points du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$, on note α, β, γ et δ les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}})$,

- on fait un dessin,
- on montre que le triangle (O,A,B) est rectangle en A, (O,B,C) en B et (O,C,D) en D,
- on montre que $\tan(\alpha) = \tan(\beta) = \frac{1}{3}$, $\tan(\gamma) = \frac{1}{7}$ et $\tan(\theta) = 1$,
- on montre que $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7}) = \frac{\pi}{4}$.

10/04. La séance est consacrée au deuxième contrôle.