

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Résumé des séances

10/01. On introduit les nombres complexes comme des nombres de la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$ et où $i^2 = -1$. On définit l'addition et la multiplication des complexes :

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$;

- $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$ si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

On explique pourquoi $(\mathbf{C}, +)$ est un groupe commutatif comme $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$ et $(\mathbf{R}, +)$ mais aussi comme $(\{0\}, +)$, (\mathbf{Q}^*, \times) et (\mathbf{R}^*, \times) . On explique pourquoi $(\mathbf{N}, +)$ ne l'est pas. On donne un exemple de groupe non commutatif, celui des permutations d'un ensemble à trois éléments. On démontre la formule de l'inverse pour la multiplication. On la vérifie à titre d'exercice. On explique que $(\mathbf{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. On définit les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. On explique l'identification de \mathbf{R} avec le sous-ensemble des complexes de partie imaginaires nulles. On vérifie que la multiplication des complexes telle qu'elle a été définie donne bien $i^2 = -1$.

17/01. On définit les fonctions module et argument d'un nombre complexe et on démontre les principales propriétés de ces fonctions. On explique ce qu'est la représentation géométrique des complexes et on définit l'affixe d'un point du plan euclidien comme le complexe qui lui est en correspondance. On étudie l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe. On introduit l'exponentielle complexe, on étudie ses principales propriétés, on démontre en particulier l'égalité $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$ et on prouve que si $\alpha = \beta + i\gamma$ est un complexe non nul l'ensemble des complexes qui vérifient $\exp(z) = \alpha$ est non vide et est formés des complexes $z_0 + 2ik\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ où z_0 est un complexe qui vérifie $\exp(z_0) = \alpha$.

24/01. On définit le conjugué d'un nombre complexe, on donne ses principales propriétés et on utilise cette notion pour prouver l'inégalité triangulaire vérifiée par la fonction module :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ si } z, z' \in \mathbf{C}$$

et l'égalité n'a lieu que si $z = 0$ ou s'il existe $\lambda > 0$ tel que $z' = \lambda z$. On calcule la représentation trigonométrique de quelques complexes comme $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on calcule $\cos(\frac{\pi}{12})$. On montre que les couples $(c, s) = (\frac{1-p^2}{1+p^2}, \frac{2p}{1+p^2})$ avec $p \in \mathbf{Q}$ sont des couples de rationnels qui vérifient $c^2 + s^2 = 1$ et correspondent donc à des angles θ qui donnent des cosinus et des sinus rationnels. On explique qu'il y a une relation entre ces nombres et l'équerre du maçon dont les côtés sont proportionnels à 3, 4 et 5. C'est l'occasion de citer les triplets pythagoriciens. On indique que d'Alembert, Girard et surtout Gauss montrent que si $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ avec $a_n \neq 0$ alors il existe entre 1 et n complexes tels que $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = 0$. On indique que si la résolution par des formules des équations du second degré

$(a + bz + cz^2 = 0)$ est possible, comme celles du troisième degré $(a + bz + cz^2 + dz^3 = 0)$ (Scipione del Ferro, 1515, Tartaglia, 1535, Cardan 1545) et du quatrième degré $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 = 0)$ (Ferrari, 1540), Abel (1823) et Galois (1830) démontrent qu'il n'en rien pour des équations de degré 5 ou plus. Il est enfin évoqué (de façon moins précise) le résultat de Gauss suivant : si p est un nombre premier alors on peut construire à la règle et au compas un polygone régulier à p côtés si et seulement si p est un nombre premier dit de Fermat, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $p = 2^{2^n} + 1$

31/01. On étudie les racines n -ièmes d'un nombre complexe. On décrit d'abord les n racines n -ièmes de l'unité (les complexes z tels que $z^n = 1$) puis on donne l'ensemble des n racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul a (les complexes z tels que $z^n = a$). On donne comme exemple les racines quatrièmes de 1. On donne un exemple plus compliqué. On explique pourquoi $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ (équation d'Euler),

On étudie la résolution des équations du second degré à coefficient complexes ($az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z avec $a, b, c \in \mathbf{C}$ et $a \neq 0$). On fait la réduction qui permet de calculer les deux racines $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ où $\sqrt{b^2 - 4ac}$ est une des deux racines carrées complexes de $b^2 - 4ac$ qu'on choisit arbitrairement.

On étudie la recherche des racines carrée d'un nombre complexe. On montre qu'étant donné $w = u + iv \in \mathbf{C}$ les nombres complexes de la forme $z = x + iy$ qui vérifient $z^2 = w$ vérifient $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$, $x^2 - y^2 = u$ et $2xy = v$.

On traite des exemples (calcul des racines carrées d'un nombre complexe, calcul des racines d'une équation du second degré).

On explique comme un peu de géométrie permet de montrer que $3 < \pi < 4$.

On explique comment à la règle et au compas construire \sqrt{x} si on connaît les longueurs 1 et x .

07/02. On montre comment les complexes permettent de trouver une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier. Plus précisément on s'intéresse à l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ vérifiée par $\exp(2i\frac{\pi}{5})$ et dont l'étude permet le calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ en établissant $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

On donne rapidement une interprétation de l'égalité $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$ vérifiée par $\exp(\frac{2i\pi}{n})$ en termes de barycentre après avoir esquissé (au moins dans le cas de \mathbf{R}) la notion de barycentre.

On étudie par la même occasion les sommes du type $1 + z + \dots + z^n$ ainsi que les sommes $1 + \cos(\theta) + \dots + \cos(n\theta)$ et $\sin(\theta) + \dots + \sin(n\theta)$. On rappelle aussi quelques constructions élémentaires à la règle et au compas (milieu, perpendiculaire, parallèle, subdivisions égales d'un segment).

En fin de séance on introduit les notions de fonction, d'application, de domaine de définition en donnant quelques exemples.

14/02. On débute la séance en présentant les notions de fonctions et d'applications en termes de graphes. On résume à cette occasion la notion de graphe comme sous ensemble d'un produit cartésien $E \times F$ et on fait le parallèle avec les notions de graphe et de graphe orienté représentés par des sommets reliés par des arêtes ou des arêtes orientées.

On explique ce qu'est l'ensemble des réels en le comparant à ceux des rationnels, des relatifs et des naturels, voire des décimaux.

On montre que \mathbf{N} est en bijection avec \mathbf{Z} , \mathbf{Q} et \mathbf{N}^2 mais pas avec \mathbf{R} . C'est l'occasion d'utiliser le raisonnement diagonal de Cantor.

Au cours de cette séance on prouve l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et on explique la périodicité de l'écriture décimale des seuls rationnels.

21/02. La première partie de la séance est consacrée à CMP4.

On consacre la seconde partie consacrée à CMP3. On y introduit la notion de polynôme et donc d'indéterminée. On définit elliptiquement les notions d'addition, de multiplication par un scalaire, de produit, de composée et on traite deux exemples explicites.

La séance est suivie du premier contrôle continu.

13/03. La séance est consacrée à l'introduction des notions de suite et de limite. On définit ce qu'est une suite numérique et on donne quelques exemples (suite constante, suite arithmétique, suite géométrique, suite de Fibonacci). On étudie la relation entre suite de Fibonacci et suites géométriques. C'est l'occasion d'évoquer et de définir le nombre d'or. On calcule la somme de termes successifs d'une suite arithmétique (par les mathématiques du dessin) ou d'une suite géométrique (par des mathématiques plus conceptuelles). On introduit aussi la notion de limite. L'accent est mis sur celle de limite finie d'une suite numérique. On indique qu'une suite numérique $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet le réel l comme limite si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} (n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon).$$

On montre l'unicité de la limite (lorsqu'elle existe). On donne des exemples du calcul de la limite d'une suite (suite constante, suite des inverses des entiers naturels (en prenant 1 comme premier terme), suite géométrique λ^n avec $\lambda \in]0, 1[$). Pour traiter le dernier exemple on utilise l'inégalité de Bernoulli qui dit que $(1+x)^n \geq 1+nx$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \geq 0$. On a recours à la partie entière des réels dans les deux derniers exemples.

20/03. La séance est consacrée aux notions de limite (suite et fonction) et de continuité.

On donne quelques propriétés algébriques des limites de suites et des propriétés d'inégalité et d'encadrement. On introduit la notion de suites adjacentes et on montre que de telles suites ont une même limite. On étudie dans le détail les suites de la forme $(\frac{1}{0!}x^0 + \dots + \frac{1}{n!}x^n)_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque $x \in]0, 1]$. On montre que ces suites ont des limites. Dans le cas où $x = 1$ on utilise aussi une méthode de suites adjacentes pour montrer que $(\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!})_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite e en introduisant la suite $(\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!})_{n \in \mathbf{N}}$. On montre que e est irrationnel par un raisonnement par l'absurde.

Après avoir introduit la notion de limite de fonction on étudie cette notion sur des exemples $(x, x^2, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \sin(x), \cos(x), x^n, x^{\frac{1}{n}})$ et on donne quelques propriétés algébriques des limites de fonctions et des propriétés d'inégalité et d'encadrement. On donne la définition de continuité et on énonce que la somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont des fonctions continues.

27/03. Les séances de CMP3 et CMP4 sont mélangées et on aborde essentiellement les points suivants de CMP3.

On étudie le théorème des valeurs intermédiaire et celui qui dit que l'image d'un segment par une application continue est un segment. On donne quelques applications.

On étudie le théorème de Rolle, celui des valeurs intermédiaires, et donne des applications à l'étude de variations des fonctions.

On présente la fonction logarithme népérien à partir d'un calcul d'aire. On énonce le théorème fondamentale de l'analyse. On explique la propriété de morphisme du logarithme. On présente l'exponentielle comme sa réciproque. On prouve en plusieurs étapes que si $x \in [0, 1]$ alors la suite de terme général $1 + \frac{1}{1!}x^1 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ tend vers $\exp(x)$. Une étape charnière est la preuve de la double inégalité $1 + x \leq \exp(x) \leq 1 + 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

On établit que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ et que la dérivée de \arctan vaut $\frac{1}{1+t^2}$. On explique que ceci

permet d'établir $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$ et de lier $\arctan(x)$ et $x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ comme on a fait dans l'étude de l'exponentielle. On conclut en indiquant que la combinaison de l'ensemble permet de calculer une approximation de $\frac{\pi}{4}$ assez efficacement.

03/04. Les séances CMP3 et CMP4 sont mélangées. Concernant CMP3 on aborde dans un premier temps la preuve de l'irrationalité de π par Mary Cartwright après avoir évoqué l'histoire de ce résultat en montrant les travaux de Jean-Henri Lambert, Charles Hermite et Ivan Niven. C'est l'occasion de présenter un outil fondamental qui est l'intégration par parties et donc de citer Henri Lebesgue à qui on doit la théorie moderne de l'intégration et Laurent Schwartz fondateur de la théorie des distributions dans laquelle l'intégration par parties constitue un point de départ. Dans un second temps on aborde la partie du deuxième contrôle qui portera sur CMP3. En particulier on traite des points suivants.

1/ On calcule ω^{7+6n} lorsque $\omega = 1 + \sqrt{3}i$.

2/ Après avoir admis ou rappelé que l'exponentielle est l'unique fonction dérivable de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , non constante et égale à sa dérivée et que cette fonction vérifie aussi $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ si $a, b \in \mathbf{R}$

- on montre que $\exp(0) = 1$ et que si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(x) \geq 0$,

- on montre que si $x \geq 0$ alors $\exp(x) \geq 1 + x$,

- on montre que si $x > 0$ et si $t \in [0, x]$ alors $1 + t \exp(x) - \exp(t) \geq 0$,

- on en déduit, en prenant $x = \frac{1}{2}$, que $\exp(\frac{1}{2}) \leq 2$,

- on conclut en montrant que $2 \leq \exp(1) \leq 4$.

10/04. Il s'agit d'une séance de questions qui précède le deuxième contrôle qui a lieu en fin de matinée à la place de CMP4.