Université de Rennes
UFR Mathématiques
2023-2024

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Partie analyse - Mineure Maths - PASS
Contrôle continu 2 - 90 minutes

Les réponses sont justifiées.

CMP3

Exercice 1 (4 pts) Soit $\omega = 1 + \sqrt{3}i$ et $n \in \mathbf{N}$. Calculer ω^{7+6n}.

Exercice 2 (6 pts) On rappelle que l'exponentielle est l'unique fonction dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, non constante et égale à sa dérivée. Elle vérifie aussi $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ si $a, b \in \mathbf{R}$.

1/ Montrer que $\exp(0) = 1$ et que si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(x) \geq 0$.

2/ Montrer que l'exponentielle est croissante.

3/ Montrer que si $x \geq 0$ alors $\exp(x) \geq 1 + x$.

4/ Soit $x > 0$. Montrer que si $t \in [0, x]$ alors $1 + t\exp(x) - \exp(t) \geq 0$.

5/ En déduire, en prenant $x = \frac{1}{2}$, que $\exp(\frac{1}{2}) \leq 2$.

6/ Montrer que $2 \leq \exp(1) \leq 4$.

CMP4

Exercice 1 (2 pts) Expliquer comment construire à la règle et au compas sur une feuille dont la longueur 1 est déjà tracée la longueur $\cos(\frac{\pi}{5})$ sachant que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \dfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$.

Exercice 2 (5 pts) Soit $E = \{P(x) = a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbf{R}\}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré au plus 2. Muni de l'addition et de la multiplication par les réels c'est un espace vectoriel.

1/ Montrer que la famille $(1, x, x^2)$ est une famille génératrice de E.

2/ Soit $P \in E$. Calculer $P(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$.

3/ Montrer que si P est la fonction nulle alors $a = b = c = 0$.

4/ Montrer que la famille $(1, x, x^2)$ est libre.

5/ Soit $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Trouver les $P \in E$ tels que $P(-1) = \alpha$ et $P(1) = \beta$.

Exercice 3 (3 pts) Soit $O = (0,0)$, $A = (9,0)$, $B = (9,3)$, $C = (8,6)$ et $D = (7,7)$ des points du plan euclidien $\mathbf{R}^2$. On note α, β, γ et δ les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}})$.

1/ Montrer que le triangle (O, A, B) est rectangle en A, (O, B, C) en B et (O, C, D) en D.

2/ Montrer que $\tan(\alpha) = \tan(\beta) = \frac{1}{3}$, $\tan(\gamma) = \frac{1}{7}$ et $\tan(\theta) = 1$.

3/ Montrer que $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7}) = \frac{\pi}{4}$.