Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2024-2025

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Analyse

Résumé des séances

(version du 29 janvier 2025)

Programme

Nombres complexes
Définition de l'ensemble des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Module. Argument. Équations du second degré à coefficients complexes. Racines énièmes. Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane. Définitions (via les nombres complexes) : similitude, isométrie, translation, rotation, réflexion, symétrie glissée. Définition des angles orientés et non orientés. Mesure d'un angle orienté.
Fonctions réelles (techniques fondamentales de calcul en analyse)
Fonctions classiques : polynômes (et leur division euclidienne), fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques. Limites de suites et de fonctions, continuité, dérivabilité : étude des propriétés classiques (propriétés algébriques (y compris avec composition et passage à l'inverse), comparaison, adjacence, valeurs intermédiaires, extrema, accroissements finis, variations...). Fonctions de 2 ou 3 variables : définition, continuité, composition, dérivées partielles.
Primitives et intégrales
Quelques primitives classiques. Intégration par partie. Changement de variable. Linéarité de l'intégration. Lien entre intégrale et primitive. Application à la définition du logarithme et de l'exponentielle.

Règles d'évaluation

Pour l'UE Maths-Analyse l'évaluation passe par deux contrôles continus de 90 minutes.

Il est prévu que les contrôles continus aient lieu à 10h15 le 26 février et le 02 avril.

La note finale pour Maths-Analyse sera la moyenne des deux notes obtenues ou la note de la deuxième épreuve si celle-ci est supérieure à celle de la première.

Déroulement des séances

08/01. Au cours de cette séance on étudie quelques propriétés des ensembles $\mathbf{N}$ des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, $\mathbf{D}$ des décimaux, $\mathbf{Q}$ des rationnels et $\mathbf{R}$ des réels.

On explique que ces ensembles sont munis de lois (lois de composition internes), l'addition et la multiplication, qui sont commutatives et associatives. Ces lois possèdent chacune un élément neutre, 0 pour l'addition, 1 pour la multiplication. Le nombre 0 est absorbant pour la multiplication.

On signale aussi que **N** est inclus dans **Z** qui est inclus dans **D** qui est inclus dans **Q** qui est inclus dans **R**.

On précise enfin qu'une équation d'inconnue x du type $a+x=b$ n'a pas toujours de solution dans **N** mais a toujours une et une seule solution dans **Z** (et aussi dans **D**, **Q** et **R**). De même l'équation d'inconnue x du type $a\times x=b$ (avec $a\neq 0$) n'a pas toujours de solution dans **N** ou **Z** mais a toujours une et une seule solution dans **Q** (et aussi dans **R**).

On explique que la soustraction ou la division ne sont pas à considérer comme des lois de composition internes mais plutôt comme la résolution d'équations du type $a+x=b$ ou $a\times x=b$.

On discute des relations entre les notions d'entiers naturels et de cardinaux (d'ensembles finis en particulier).

On explique qu'on dit que deux ensembles E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de l'un dans l'autre, autrement dit si et seulement s'il existe une application f de E dans F tel que si y est un élément de F il existe un et un seul élément x de E tel que $f(x)=y$. Un cardinal revient à considérer tous les ensembles qui ont "même cardinal".

On montre pourquoi les ensembles **N**, **Z**, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ et **Q** ont même cardinal. C'est l'occasion (quand il s'agit de construire une bijection entre **N** et **Q**) d'évoquer de crible d'Ératosthène (environ -276, -194). C'est aussi l'occasion d'une digression sur Hypathie (environ 355, 415), mathématicienne assassinée car trop progressiste. Lorsqu'on construit une bijection entre $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ et **N** on utilise le fait que

$$1+2+...+n=\sum_{k=1}^{n}=\frac{n(n+1)}{2}$$

et on donne la méthode que, selon une légende a priori non vérifiée, Gauss (1777, 1855) propose pour établir cette égalité.

On donne aussi la méthode de Cantor (1845, 1918) qui permet de montrer qu'il n'existe pas de bijection de **N** dans l'ensemble des réels compris strictement entre 0 et 1 après avoir expliqué que l'application qui à t dans $]-1,1[$ associe $\tan -\frac{\pi}{2}t)$ était une bijection entre $]-1,1[$ et **R**. On a aussi montré comment construire une bijection entre $]0,1[$ et $]-1,1[$ en s'appuyant sur un argument géométrique en lien avec le théorème de Thales (-624, -547).

On discute de l'écriture des nombres en base deux plutôt qu'en base dix. C'est l'occasion de signaler que les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont des idéogrammes. On donne l'écriture de quelques nombres en base deux (314, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 11) et on calcule (avec erreurs, mea culpa, le produit de 15 par 11 en passant par leurs écritures en base deux (comme des ordinateurs).

On explique que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments compte 2^n éléments et après avoir démontré l'inégalité de Bernoulli (Jacques, 1654, 1705) qui dit que si x est un réel positif ou nul et si n est un entier naturel alors $(1+x)^n > nx$ (inégalité démontrée par un raisonnement par récurrence dont on soigne la rédaction) on en déduit qu'il y toujours plus de parties (i.e. de sous-ensembles) dans un ensemble fini que d'éléments.

On généralise ce résultat au cas d'un ensemble quelconque, fini ou infini en ayant recours à un raisonnement par l'absurde. Il n'existe pas de bijection entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.

On explique le lien entre les sous-ensembles (les parties) d'un ensemble et les applications de cet ensemble dans l'ensemble $\{0,1\}$: à chaque application est associé un sous-ensemble et à chaque sous-ensemble est associée une application. Ceci signifie que l'ensemble des parties d'un ensemble est en bijection avec l'ensemble des applications de cet ensemble dans $\{0,1\}$.

On explique aussi comment associer à un réel compris entre 0 et 1 une suite de 0 et de 1 c'est à dire une application de **N** dans $\{0,1\}$ et donc une partie de **N**. Ceci permet de comprendre d'une autre façon que la méthode de Cantor pourquoi il n'y pas de bijection entre **N** et **R**.

Puisqu'il n'y a pas de bijection entre **N** et **R** et qu'il y a une bijection entre **N** et **Q** on est sûr qu'il existe des réels qui ne sont pas des rationnels. Il est aussi montré qu'on peut s'en convaincre en raison de la périodicité (qui est prouvée) de l'écriture décimale des rationnels : on donne un réel dont l'écriture décimale n'est pas périodique.

On explique aussi qu'une propriété remarquable de **R** et que ne possède pas **Q** est la propriété de la borne supérieure : si X est un sous-ensemble non vide de **R** et majoré (il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on a $x \leq M$) alors X possède une (unique) borne supérieure S (c'est l'unique réel tel que si $x \in X$ alors $x \leq S$ et si $y \in \mathbf{R}$ vérifie $y < S$ alors il existe $x \in X$ tel que $y < x$).

On montre alors que la racine carrée de 2 (notée $\sqrt{2}$) qui apparaît naturellement comme longueur d'un coté d'un carré dont les sommets sont les milieux d'un carré de côté 2 (faire le dessin qui est une version basique du théorème de Pythagore (environ -580, -495)) ne peut être un nombre rationnel. Pour le faire on donne un classique raisonnement par l'absurde.

Il reste à montrer que la racine carrée de 2 (notée $\sqrt{2}$) est la borne supérieure de l'ensemble

$$X = \{r \in \mathbf{Q}|\ 0 \leq r,\ r^2 \leq 2\}$$

qui est un ensemble non vide (il contient 0, 1, $1,4$) et majoré par 2.

15/01. On rappelle la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

On prouve que la borne supérieure s du sous-ensemble E de **R** des $\{r \in \mathbf{Q}|r \geq 0, r^2 \leq 2\}$ qui est non vide car contenant 0, 1 et $1,4$ et majoré par 2 est égale à $\sqrt{2}$. On débute sans conclure en introduisant les réels $s-\varepsilon$ et $s+\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. La preuve qui est finalement donnée est celle suggérée par une personne de la promotion. Elle consiste à montrer que $\sqrt{2}$ est un majorant de E et que c'est le plus petit de ses majorants. Mais à ce stade l'existence de $\sqrt{2}$ n'est pas donnée.

On explique que **R** est archimédien, c'est à dire que si $x > 0$ et si $y \in \mathbf{R}$ alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $y \leq nx$.

On donne comme exemple d'ensemble ordonné mais non archimédien un exemple voisin de l'ensemble suivant. Il s'agit de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de la forme $x \in \mathbf{R} \mapsto \lambda x^n$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ et $n \in \mathbf{N}$ auxquelles on ajoute les fonctions de la forme $x \in \mathbf{R} \mapsto \mu \exp(x)$ avec $\mu \in \mathbf{R}^{+*}$. L'ordre qu'on met sur $\mathcal{E}$ est donnée par $f \leq g$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

C'est l'occasion d'expliquer pourquoi si $x < y$ sont deux réels il existe un rationnel dans $]x,y]$. On le fait dans le cas ou $0 \leq x < y$ et on considère le rationnel $m_0, \delta_1 ... \delta_p$ où δ_p est le premier chiffre de l'écriture en base dix de y qui diffère de celle de x.

On introduit la notion de suite numérique et on étudie les suites arithmétiques et géométriques (différentes caractérisations, somme de termes, croissance, décroissance...). On s'intéresse aussi à la formule

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

On montre que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k$ et $\lambda \in]0,1[$ est croissante et majorée par $\dfrac{1}{1-\lambda}$.

22/01. On prouve l'existence de $\sqrt{2}$ en montrant que c'est la borne supérieure du sous-ensemble E de **R** des $\{r \in \mathbf{Q}|r \geq 0, r^2 \leq 2\}$. Pour le faire on raisonne par l'absurde, d'abord en montrant qu'en supposant $s^2 > 2$ alors on peut trouver un majorant de E strictement plus petit que s (par exemple $s - \eta$ avec $\eta \in]0, \frac{s^2-2}{2s}]$), puis en montrant qu'en supposant $s^2 < 2$ alors il existe dans E un rationnel strictement plus grand que s (prendre un rationnel quelconque dans $]s, s+\eta[$ avec $\eta \in]0, \frac{2-s^2}{5}[$ car alors $(s+\eta)^2 < 2$).

On réutilisant la version de l'inégalité de Bernoulli prouvée le 8 janvier on montre que l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ [n \geq N \Longrightarrow 0 < r^n < \varepsilon]$$

est vraie si $r \in]0, 1[$.

On donne, pour une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la définition de tendre, de converger, vers un réel donné $l \in \mathbf{R}$ en l'exprimant à l'aide de l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ [n \geq N \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon].$$

On indique que ceci est noté $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

On montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0 et qu'il en est de même pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \frac{\lambda}{(n+1)^d}$ si $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $d \in \mathbf{N}^*$.

On montre qu'a contrario, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = (-1)^n$ ne tend vers aucun réel l.

Il est établit que si une une suite tend vers un réel elle ne tend que vers ce réel (unicité de la limite).

On montre que toute suite croissante majorée $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la borne supérieure de $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$. On énonce un résultat analogue pour les suites décroissantes et minorées.

On étudie les suites récurrentes définies de la façon suivante. On considère une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ et une suite $((u_n)_{n ß \mathbf{N}}$ de la forme $u_0 \in \mathbf{N}$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre que si f est croissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante si $u_0 \geq u_1$. On montre que si f est décroissante alors les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $v_n = u_{2n}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $w_n = u_{2n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ sont l'une croissante et l'autre décroissante. On illustre ces situations avec des représentations graphiques.

En fin on s'intéresse à la suite de Héron (environ 0, -100). On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2/x}{2}$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ si $n \in \mathbf{N}$. Après avoir calculé la dérivée de la fonction f (on obtient $f'(x) = \frac{1-2/x^2}{2}$) on montre à l'aide du calcul de $x - f(x)$ et de $f(x) - \sqrt{2}$ que la suite $(u_n)_{n_in\mathbf{N}}$ est minorée par $\sqrt{2}$ et décroissante.

29/01. On débute la séance en prouvant que la suite de Héron considérée mercredi dernier converge vers $\sqrt{2}$. Pour le faire on montre en particulier une inégalité du type $|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$ pour les $n \geq 2$. On donne une interprétation géométrique de la méthode de Héron en expliquant que a_{n+1} est la moyenne de la longueur a_n et de la largeur $\frac{2}{a_n}$ d'un rectangle d'aire 2. On fait observer à l'aide d'un tableur que la suite de Héron converge très rapidement vers $\sqrt{2}$ et on explique (aussi graphiquement) que ceci résulte du fait que la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2/x}{2}$ associée à la suite de Héron ($a_{n+1} = f(a_n)$ si $n \in \mathbf{N}$) possède une dérivée nulle en $\sqrt{2}$.

Ensuite on prouve de multiples propriétés des suites convergentes (limite d'une somme, d'un produit, de l'inverse, théorème des gendarmes, respect de l'ordre éventuel par passage à la limite, caractère borné des suites convergentes, convergence vers 0 du produit d'une suite convergente vers 0 avec une suite bornée). On montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \frac{1}{n+1}(\text{Partie entiere}(n\sqrt{2}) - n\sqrt{2}))$ si $n \in \mathbf{N}$ converge vers 0. On donne aussi à l'aide d'un tableur une représentation graphique des termes Partie entiere$(n\sqrt{2}) - n\sqrt{2}$ si $n \in \mathbf{N}$.

La dernière partie est consacrée au début de l'étude des fonctions numériques de la variable réelle. On introduit la notion de fonction continue en un réel en discutant de l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On montre que les fonctions constantes, les fonctions affines et la fonction qui à $x_inn\mathbf{R}$ associe son carré x^2 sont continues en tout réel. On montre que la somme de deux fonctions continues en un point a est continue en a. On énonce que le produit de deux fonctions continues en a est continu en a. On débute la preuve de ce résultat de la façon suivante. On considère $f, g : I \to \mathbf{R}$ où I est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$. On fixe un réel a dans I. On montre que si $x \in I$ alors

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)).$$