Université de Rennes
UFR Mathématiques
2024-2025

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

# Partie analyse - Mineure Maths - PASS
# Exercices à préparer pour le contrôle continu 2

Les réponses sont justifiées.

On rappelle que exp est l'unique bijection dérivable de $\mathbf{R}$ dans $]0,+\infty)$ qui vérifie $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$. Cette fonction vérifie $\exp(t+s) = \exp(t) \times \exp(s)$ si $t, s \in \mathbf{R}$. Sa réciproque, ln, est une bijection dérivable de $]0,+\infty)$ dans $\mathbf{R}$. Elle vérifie $\ln(1) = 0$ et si $t \in ]0,+\infty)$ alors $\ln'(t) = \frac{1}{t}$. De plus si $t, s \in ]0,+\infty)$ alors $\ln(t \times s) = \ln(t) + \ln(s)$.

**Exercice 1** 1. Montrer que $f$ définie par $f(x) = x + \exp(x)$ si $x \in \mathbf{R}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $f(-1) < 0$ et que $f(0) > 0$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel $a$ tel que $a + \exp(a) = 0$.

**Exercice 2** On considère la fonction dérivable $f$ définie sur $]0,+\infty)$ par $f(t) = \frac{1}{t} + \ln(t)$.
1. Étudier les variations de $f$.
2. Montrer que si $t \in ]0,1[$ alors $f(t) > 0$ et en déduire que si $t \in ]0,1[$ alors $|t\ln(t)| < 1$.
3. Vérifier que si $t \in ]0,1[$ alors $|t\ln(t)| = 2\sqrt{t} \cdot |\sqrt{t}\ln(\sqrt{t})|$.
4. Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. Trouver $\eta \in ]0,1[$ tel que si $t \in ]0,\eta[$ alors $|t\ln(t)| < \varepsilon$.

**Exercice 3** Si $a > 1$ et $x > 0$ on appelle logarithme de base $a$ de $x$ le nombre $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
Si $r \in \mathbf{R}$ on note $\mathrm{Ent}(r)$ sa partie entière.
1. Vérifier que $x = \exp(\log_a(x)\ln(a))$ si $a > 1$ et $x > 0$.
2. Vérifier que si $a > 1$ et si $x > 0$ alors

$$a^{\mathrm{Ent}(\log_a(x))} \leq x < a^{(1+\mathrm{Ent}(\log_a(x)))}.$$

3. Déduire de $500 < 8^3 = 512 < 600$ que $4000 < 8^4 < 5000$, $8^7 < 3000000$ et $8^8 > 16000000$.
4. Montrer que $\mathrm{Ent}(\log_8(10000000)) = 7$.
5. Combien de chiffres compte l'écriture en base huit de dix millions ?

**Exercice 4** 1. Donner une suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels qui tend vers $\exp(3)$.
2. Donner une suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels qui tend vers $\sin(1)$.
3. Donner une suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels qui tend vers $\cos(2)$.
4. Donner une suite $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels qui tend vers $\ln(1+\frac{1}{2})$.

**Exercice 5** Trouver $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1\}$ on a $\dfrac{1}{x^2+2x-3} = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{x-1}$.

**Exercice 6** Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $A_\lambda$ le polynôme $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 - x + 2$ et $B$ le polynôme $x^2 + x + 1$.
1. Calculer le quotient $Q_\lambda$ et le reste $R_\lambda$ de la division euclidienne de $A_\lambda$ par $B$.
2. Vérifier que $R_\lambda$ est le polynôme nul si et seulement si $\lambda = 0$.
3. Vérifier que $Q_0 = (x-2)(x-1)$.