Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO)
Examen 2nde session - septembre 2003

Les documents et calculatrices sont interdits.

On note D le disque $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

I. 1. Soit f continue sur D et vérifiant $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$. On suppose que la restriction de f à $\{z \in D : \mathcal{I}mz \geq 0\}$ est injective.
1.a. Montrer que si $f(\{z \in D : \mathcal{I}mz > 0\})$ est inclus dans $\{\mathcal{I}mz > 0\}$ alors :
i. $f(D \cap \mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$,
ii. $f(\{z \in D : \mathcal{I}mz < 0\}) \subset \{\mathcal{I}mz < 0\}$,
puis conclure que f est injective.
1.b. On suppose qu'il existe $a_1, a_2 \in D$ avec $\mathcal{I}ma_1, \mathcal{I}ma_2 > 0$ tels que $\mathcal{I}mf(a_1) \leq 0 < \mathcal{I}mf(a_2)$. Montrer qu'il existe alors $b \in D$ avec $\mathcal{I}mb > 0$ tel que $f(b) \in \mathbf{R}$ et en déduire que f n'est pas injective.
2. Montrer que f définie sur D par $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ est une bijection de D dans $\{\mathcal{R}ez > 0\}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe bijective de $\mathbf{C}$ dans D.
4. Montrer que si $f : D \setminus \{0\} \to D$ est holomorphe injective alors f se prolonge en une fonction holomorphe injective de D dans D.

II. Soit $C = \{z \in \mathbf{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ et soit f définie sur C par par $f(z) = \frac{1}{z}$.
1. Calculer $\int_{|z|=1} f(z)dz$.
2. Soit $P \in \mathbf{C}[z]$ un polynôme. Montrer que $\sup_{z \in C} |f(z) - P(z)| \geq 1$.

III. Soit $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que que $|f(z)| \leq \frac{|z|}{2}$ si $z \in D$ et soit $g : D \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $g(0) = 0$. On considère les suites de fonctions f_n et G_n définies par $f_0 = z$, $G_0 = 0$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_{n+1} = f \circ f_n = f_n \circ f$ et $G_{n+1} = G_n + g \circ f_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} g \circ f_k$.
1. Vérifier que f_n et G_n sont bien définies et holomorphes sur D et que $f_n(D) \subset \{|z| < \frac{1}{2^n}\}$ si $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que si $z \in D$ et $|z| \leq \frac{1}{2}$ alors $|g(z)| \leq K|z|$.
3. Montrer que $|g \circ f_{n+1}(z)| \leq \frac{K}{2^{n+1}}$ si $n \in \mathbf{N}$.
4. Montrer que la suite G_n converge uniformément sur D vers une fonction holomorphe.

IV. Si $v = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, on pose $v^{2/3} = \rho^{2/3} e^{\frac{2i\theta}{3}}$.
Soit $\Omega = \{\mathcal{I}mz > 0\}$ et soit f définie sur $\overline{\Omega} \setminus \{-1, 0\}$ par $f(z) = \frac{1}{(1+z)^{2/3} z^{2/3}}$.
Soit enfin $F : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$, continue, holomorphe en restriction à Ω et définie par $F(z) = \int_0^1 f(tz)zdt$. En particulier $F'(z) = f(z)$ si $z \in \Omega$.

1. Montrer qu'il existe f_1 et F_1 holomorphes sur $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ et qui coïncident avec f et F sur Ω.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\{|z| < \varepsilon\}$ qui coïncide avec f sur $\Omega \cap \{|z| < \varepsilon\}$.
3. Soit $z_0 \in \Omega$ avec $\mathcal{R}ez > 0$ et soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la série entière telle que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ au voisinage de z_0. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est égal à $|z_0|$.
4. On pose $\int_0^{+\infty} f(x)dx = L$. Vérifier que $L \in]0, +\infty[$.
5. Vérifier que si $z \in \Omega$ et $|z| > 2$ alors $|1 + z| > \frac{|z|}{2}$, $|f(z)| < \frac{2^{2/3}}{|z|^{4/3}}$.
6. En déduire que $\lim_{\rho \to +\infty} \int_0^{\pi} |f(\rho e^{it})| \rho dt = 0$.
7. Montrer que $|L - F(\rho e^{i\theta})| \leq \int_0^{\pi} |f(\rho e^{it})| \rho dt + \int_{\rho}^{+\infty} |f(x)| dx$ si $\theta \in [0, \pi]$ et $\rho > 1$.
8. Montrer que $\lim_{z \in \overline{\Omega}, |z| \to +\infty} F(z) = L$.