Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - Examen - mai 2003

Les documents et calculatrices sont interdits.

Si $v = \rho \exp(i\theta)$, $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, on pose $\sqrt{v} = \sqrt{\rho}\exp(\frac{i\theta}{2})$.

I. Soit $f : \{\mathcal{R}ez > -1\} \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $|f(z)| \leq \exp(-|z|^3)$ si $\mathcal{R}ez > -1$.
Si $t \geq 0$ on note f_t la fonction holomorphe définie sur $\{\mathcal{R}ez > -1\}$ par $f_t(z) = f(z)\exp(tz^2)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |\exp(tz^2)|\exp(-|z|^3) = 0$ et que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |f_t(z)| = 0$.
2. Montrer que si $z \in i\mathbf{R}$ alors $|\exp(tz^2)| \leq 1$.
3. Soit $z \in]0, +\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} |\exp(tz^2)| = +\infty$.
4. Montrer qu'il existe $z_t \in \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$ tel que $\sup\limits_{\{\mathcal{R}ez\geq 0\}} |f_t(z)| = |f_t(z_t)|$.
5. Montrer que $\mathcal{R}ez_t = 0$ et que si $\mathcal{R}ez \geq 0$ alors $|f_t(z)| \leq |f_t(z_t)| \leq |f(z_t)| \leq 1$.
6. Montrer que si $z \in]0, +\infty[$ alors $f(z) = 0$.
7. Montrer que f est la fonction nulle.

II. Soit $f : \{\mathcal{R}ez > 0\} \to \mathbf{C}$ holomorphe.
1. Montrer que $\lim\limits_{\mathcal{R}ez\to+\infty} |\exp(-\sqrt{z})| = 0$.
2. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathcal{R}ez > 1$. Exprimer, à l'aide de la formule de Cauchy, $f(z)$ et $f'(z)$ en fonction des valeurs de f sur le cercle $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi - z| = 1\}$.
3. Montrer que si $z \in \mathbf{C}$ est tel que $\mathcal{R}ez > 1$ alors $|f'(z)| \leq \sup\limits_{|\xi-z|=1} |f(\xi)|$.
4. Montrer que si $\lim\limits_{\mathcal{R}ez\to+\infty} |f(z)| = 0$ alors $\lim\limits_{\mathcal{R}ez\to+\infty} |f'(z)| = 0$.

III. Soit $D = \{|z| < 1\}$ et soit $f : D \to \mathbf{C}$ définie par $f(z) = \frac{z}{8} + \frac{z^2}{16}$.

1. Montrer que si $z \in D$ alors $f(z) \in D$ et $|f(z)| \leq \frac{|z|}{4} \leq \frac{1}{4}$.
On définit sur D deux suites de fonctions en posant $f_0 = z, \phi_0 = z$ et en posant si $n \in \mathbf{N}$ $f_{n+1} = f \circ f_n = f_n \circ f$ et $\phi_n = 8^n f_n$.
2. Vérifier les égalités $\frac{1}{8}\phi_{n+1} = \phi_n \circ f$ et $\phi'_n(0) = 1$ si $n \in \mathbf{N}$.
3. Soit $z \in D$. Si $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = f_n(z)$ et $v_n = \phi_n(z)$. Montrer les inégalités

$$|u_n| \leq \frac{1}{4^n}, \quad |u_{n+1} - \frac{u_n}{8}| \leq \frac{1}{16^{(n+1)}}, \quad |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

puis en déduire que la suite v_n est convergente.
4. Montrer que ϕ_n converge uniformément sur D vers une fonction holomorphe ϕ et en déduire que $\phi'(0) = 1$.
5. Montrer que si $z \in D$ alors $\phi(f(z)) = \frac{1}{8}\phi(z)$.

IV. Soit $\Omega = \{\mathcal{I}mz > 0\}$ et soit f définie sur $\overline{\Omega} \setminus \{-1, 0, 1\}$ par $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z+1}\sqrt{z}\sqrt{z-1}}$.
Si $R > 0$ on note Γ_R le lacet suivant : si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\Gamma_R(t) = -R + 4tR + \frac{i}{R}$ et si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ alors $\Gamma_R(t) = R\exp(i\pi(2t-1)) + i/R$.

1. Montrer qu'il existe L_0, L_1 et K dans $]0, +\infty[$ tels que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = K$ et $\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = iL_0$, $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -L_1$, $\int_0^1 f(x)dx = -iL_1$, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = L_0$.
2. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Vérifier : $|f(x + \frac{i}{R})| \leq |f(x)|$ si $R > 0$, $\lim\limits_{R \to +\infty} f(x + \frac{i}{R}) = f(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x + \frac{i}{R}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$
4. Vérifier que $|R\exp(it) + \frac{i}{R} + 1| \geq \frac{R}{2}$, $|R\exp(it) + \frac{i}{R} - 1| \geq \frac{R}{2}$, $|R\exp(it) + \frac{i}{R}| \geq \frac{R}{2}$ et $|f(R\exp(it) + \frac{i}{R})| \leq \frac{2\sqrt{2}}{R\sqrt{R}}$ si $R > 4$ et $t \in [0, \pi]$.
5. Montrer que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} |f(R\exp(it) + \frac{i}{R})| R dt = 0$.
6. Montrer que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.
7. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ et que $L_0 = L_1$.