Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) **31 mars 2004**

3ème contrôle continu

Durée : 20mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille.

Nom de l'étudiant(e) :

1. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f' = \frac{1}{z}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tel que si $z \in \Omega$ alors $\exp(f(z)) = cz$.

2. Soit ω une 1-forme localement exacte définie sur un ouvert connexe Ω et γ_0 et γ_1 deux lacets inclus dans Ω. Donner une condition suffisante pour que $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

3. Soit $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $|a - b| \neq 1$. Si $t \in [0, 1]$ on pose $\gamma_b(t) = b + \exp(2i\pi t)$. Calculer $\int_{\gamma_b} \frac{dz}{z-a}$.

4. Donner un exemple de lacet de classe C^1, $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$ tel que $\int_\gamma \frac{dz}{z-1} = 2i\pi$ et $\int_\gamma \frac{dz}{z+1} = -2i\pi$.

5. Soit D_1 le disque unité de $\mathbf{C}$ et $f \in \Omega(D_1)$.
5.a. Enoncer le principe du maximum.
5.b. Soit $v \in \mathbf{C}$. On suppose que $\lim_{|z| \to 1} f(z) = v$. Montrer que f est constante.
5.c. Soit $\varepsilon, \eta \in]0, 1[$. On suppose que si $1 - \eta < |z| < 1$ alors $|f(z)| > \varepsilon$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$ dont les zéros sont dans $\{|z| \leq 1 - \eta\}$ et $g \in \mathcal{O}(D_1)$ sans zéro tels que $gf = P$.
5.d. Montrer qu'il n'existe pas $f \in \mathcal{O}(D_1)$ telle que $\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = +\infty$.