Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**

Fonctions Holomorphes (HOLO) - dernier contrôle continu - 2003

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

On pose $D = \{|z| < 1\}$ et $S = \{|z| = 1\}$. Si $z \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{R}ez$ sa partie réelle et $\mathcal{I}mz$ sa partie imaginaire.

1. Enoncer (sans démonstration) la formule de Cauchy.

2. Si $n \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{C} \setminus S$ et $t \in [0,1]$ on pose $\gamma(t) = \exp(2i\pi t)$ et $I_n(a) = \int_\gamma (z-a)^n dz$.
2.a. Quels sont les (n,a) qui vérifient $I_n(a) \neq 0$ et que vaut alors $I_n(a)$?
2.b. En déduire que $B(z) = \dfrac{b_1}{z} + ... + \dfrac{b_p}{z^p}$ n'est pas la dérivée d'une fraction rationnelle si $b_1 \neq 0$.
2.c. Trouver α, β tels que $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{\alpha}{z-a} + \dfrac{\beta}{z-b}$ et calculer $J(a,b) = \int_\gamma \dfrac{dz}{(z-a)(z-b)}$ si $a, b \in \mathbf{C} \setminus S$.

3. Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ holomorphe sur Ω ouvert connexe qui contient $\overline{D}$ et telle que $f(S) \subset S$.
3.a. Montrer que $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$.
3.b. Soit $a \in D$ et $h(z) = \dfrac{1 - \overline{a}z}{z-a}$. On admet que $h(D \setminus \{a\}) \subset \{|z| > 1\}$ et $h(S) \subset S$. On suppose $a \notin f(D)$. Montrer que $g = h \circ f$ est bien définie au voisinage de $\overline{D}$ et que $g(\overline{D}) \subset S$.
3.c. En déduire que si $f(D) \neq D$ alors f est constante.

4. Soit f holomorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et $f(\{\mathcal{R}ez = \mathcal{I}mz\}) = \{\mathcal{R}ez = 0\}$. Montrer que $f'(0) = 0$.

5. Existe-t-il f holomorphe sur D et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R < 1$ telles que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ si $|z| < R$?