Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - contrôle continu - 27 mars 2003

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits.
Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

On pose $D = \{|z| < 1\}$. Si $z \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{R}e(z)$ ou x sa partie réelle et $\mathcal{I}m(z)$ ou y sa partie imaginaire.

1. Montrer que $P \in \mathbf{C}[z]$ polynôme complexe vérifie $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ si et seulement si $P \in \mathbf{R}[z]$.

2. Soit h définie par $h(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ (où $|a| < 1$). Montrer l'inclusion $h(D) \subset D$.

3. Montrer qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

4. Existe-t-il $h : D \to \mathbf{C}$ analytique telle que $h(D) = \overline{D}$?

5.a. Compléter ($a, b : D \to \mathbf{R}$, C^1) : "$\omega = adx + bdy$ est localement exacte si et seulement si $\dfrac{\partial a}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial x}$........"

5.b. Quelles sont les relations entre $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{R}e(h)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}e(h)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}m(h)$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{I}m(h)$ si h est holomorphe.

5.c. Soit $f : D \to \mathbf{R}$, C^∞. Montrer que $\Delta f \equiv 0$ si et seulement si $\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x}dy - \dfrac{\partial f}{\partial y}dx$ est localement exacte.

6.a. Montrer qu'il existe $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon minoré par 1 tel que si $z \in D$ alors $A(z) = \dfrac{\exp(1/(1+z))}{1+z}$.

6.b. En déduire qu'il existe h holomorphe sur $\Omega = \{|z-1| < 1\}$, nulle en 1, telle que $h'(z) = -\dfrac{\exp(1/z)}{z}$.

6.c. Montrer que g définie sur Ω par $g(z) = h(z)\exp(-1/z)$ vérifie $z^2 g' + z = g$.