Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) **21 avril 2004**

4ème contrôle continu

Durée : 20mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille.

Nom de l'étudiant(e) :

1. Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}$. Donner une condition nécessaire portant sur $\omega = f dz$ pour que f soit holomorphe.

2. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon r et de somme $\mathbf{A}$. Soit $0 < R < r$. Exprimer à l'aide d'une formule intégrale $\mathbf{A}(z)$ si $|z| < R$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux lacets de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ soient homotopes.

4. Si $t \in [0,1]$ on pose $\alpha(t) = -1 + \exp(2i\pi t), \beta(t) = 1 + \exp(2i\pi t), \gamma(t) = 2\exp(2i\pi t)$.
4.a. Donner une fonction holomorphe f définie sur $\mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$ telle que $\int_\alpha f dz = -1$, $\int_\beta f dz = 1$.
4.b. Que vaut $\int_\gamma f dz$ (justifier) ?

5.a. Montrer que la restriction h de $\frac{1-z}{1+z}$ au disque unité D_1 est une bijection de D_1 dans $\{\mathcal{R}e\ z > 0\}$.
5.b. Donner un exemple de bijection analytique entre D_1 et $\{-\frac{\pi}{2} < \mathcal{I}m\ z < \frac{\pi}{2}\}$.