Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - 2ème contrôle continu **13 mars 2003**

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

On pose $D = \{|z| < 1\}$. Si $z \in \mathbf{C}$, on note $\mathcal{R}e(z)$ ou x sa partie réelle et $\mathcal{I}m(z)$ ou y sa partie imaginaire.

1. Soit $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. On pose $B(z) = \sum_{n \geq 0} \overline{a_n} z^n$.
1.a. Montrer que si $z \in]-r, r[$ alors $B(z) = \overline{A(z)}$.
1.b. Montrer que s'il existe $z_k \in]0, r[, k \in \mathbf{N}$ tels que $\lim z_k = 0$ et $A(z_k) \in \mathbf{R}$ pour tout k alors $A = B$, les coefficients $a_n, n \in \mathbf{N}$ sont tous réels et $A(]0, r[) \subset \mathbf{R}$.

2.a. Trouver $f : \{\mathcal{I}m(z) > 0\} \to \{\mathcal{R}e(z) > 0, \mathcal{I}m(z) > 0\}$ analytique et bijective.
2.b. Montrer que $h = (z - i)/(z + i)$ réalise une bijection analytique entre $\{\mathcal{I}m(z) > 0\}$ et D.

3.a. Soit f analytique. Exprimer (sans démontrer) $\dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\overline{z}}, \Delta f$ et $\Delta \mathcal{R}e(f)$ en fonction de f' et 0.
3.b. En déduire que $|z|^2 = x^2 + y^2$ n'est pas la partie réelle d'une fonction analytique.

4. Soit $f : D \to D$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$ et $\lambda \in]0, 1[$.
4.a. Montrer qu'il existe $g : D \to \mathbf{C}$ analytique telle que si $z \in D$, $f(z) = zg(z)$.
4.b. Montrer que si $\lambda \leq |z'| < 1$ alors $|g(z')| \leq 1/\lambda$.
4.c. Déduire de 4.b. et du principe du maximum que si $|z| \leq \lambda$ alors $|g(z)| \leq 1/\lambda$.
4.d. Déduire de 4.a. et 4.c. que si $z \in D$ alors $|g(z)| \leq 1$ et $|f(z)| \leq |z|$.
4.e. Montrer que s'il existe $z_0 \in D$ tel que $|g(z_0)| = 1$ alors g est constante et $f = \alpha z$ avec $|\alpha| = 1$.