Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - 1er contrôle continu **13 février 2003**

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

On note $\mathbf{C}[[z]]$ l'anneau des séries entières de rayon quelconque et $\mathbf{C}\{z\}$ l'anneau des séries entières de rayon non nul. Si $\Omega \subset \mathbf{C}$ est un ouvert on note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'anneau des fonctions analytiques définies sur Ω.

1. Soit Ω ouvert de $\mathbf{C}$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction. Quand dit-on que f est $\mathbf{C}$-dérivable en a?

2. Définition du rayon de convergence de $A = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbf{C}[[z]]$.

3. Caractérisation du rayon de convergence à l'aide du critère d'Hadamard (sans démonstration).

4. Soit $E = \{A = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbf{C}[[z]]; \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n| < +\infty\}$ et soit $B = \sum_{n\geq 0} z^n$.

4.a. Vérifier que $B \in E$ et que le rayon de convergence R_B de B est 1.

4.b. Montrer que si $A \in E$ alors son rayon de convergence R_A vérifie $R_A \geq 1$.

4.c. Donner un exemple d'une série $A \in (\mathbf{C}[[z]] \setminus E)$ dont le rayon de convergence est 1.

5. Montrer que $A = \sum_{n\geq 1} z^n/(n-1)!$ appartient à $\mathbf{C}\{z\}$ et vérifie $A^{(2)} - 2A^{(1)} + A = 0$.

6. Soit $(*)$ l'équation différentielle : $\quad (*) \quad z + z^2 A' = A$.

6.a. Montrer que $A = \sum_{n\geq 1}(n-1)! z^n$ est l'unique solution de $(*)$ dans $\mathbf{C}[[z]]$.

6.b. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ qui contient 0. Montrer que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ alors $z + z^2 f' - f$ n'est pas la fonction nulle.

7. Montrer qu'il existe $A = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbf{C}\{z\}$ de rayon infini tel que $\exp(\exp(z)) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ si $z \in \mathbf{C}$ puis vérifier que $(A^{(1)})^2 - A(A^{(2)} - A^{(1)}) = 0$.