Université de Rennes I — **Licence de Mathématiques**

Fonctions Holomorphes (HOLO) — **3 mars 2004**

2ème contrôle continu

Durée : 20mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille.

Nom de l'étudiant(e) :

1. Qu'est ce qu'une application propre ?

2. a. Qu'est ce qu'une application ouverte ?
2. b. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ continue telle que $f(\mathbf{C}) \subset \mathbf{R}$. Montrer que f n'est pas ouverte.
2. c. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ouverte. Montrer qu'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $|f(z)| > |f(0)|$.

3. Enoncer le théorème des zéros isolés.

4. Soit $f : \{|z| < 1\} \to \mathbf{C}$ analytique. On suppose que $|f(z)| > 1$ si $|z| > \frac{1}{2}$. Montrer que $f^{-1}(0)$ est fini.

5. Montrer que $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ est connexe.

6. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n, \sum_{n\geq 0} b_n z^n \in \mathbf{C}\{z\}$ de rayons r et R, à coefficients positifs et de sommes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.
6. a. Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ soit développable à l'origine en une série entière C de rayon minoré par r.
6. b. Le rayon de C peut il alors être strictement supérieur à r (justifier) ?