Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - Examen - septembre 2004 - 2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits.

I. Soit $(A_k)_{k\in\{0,...,d\}}$ et $(B_k)_{k\in\{0,...,d\}}$ des familles finies de réels. On suppose que $d > 0$ et que $(A_d, B_d) \neq (0,0)$.
On pose $p(t) = \sum_{k=0}^{d}(A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))$ si $t \in \mathbf{R}$.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$. Montrer que f est constante si sa restriction à $\mathbf{R}$ est constante.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ qui coïncide avec p sur $\mathbf{R}$.
3. Vérifier que si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$P^{(2n)}(0) = (-1)^n \sum_{k=0}^{d} k^{2n} A_k, \text{ et } P^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \sum_{k=0}^{d} k^{2n+1} B_k.$$

4. Montrer que si $A_d \neq 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} |P^{(2n)}(0)| = +\infty$ et si $B_d \neq 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} |P^{(2n+1)}(0)| = +\infty$.
5. Montrer que P et p ne sont pas constantes.

II. On note $D = \{|z| < 1\}$ le disque unité ouvert. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{D}$, analytiques sur D et de module 1 sur $\{|z| = 1\}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}$ telle que $f^{-1}(0) = \emptyset$. Montrer que $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$ puis que f est constante.

Si $a \in D$ on note h_a la fonction définie par $h_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ si $z \in \overline{D}$.

3. Montrer que si $|z| = 1$ alors $|h_a(z)| = 1$ et en déduire que $h_a \in \mathcal{F}$.
4. Montrer que $h_{-a}(h_a(z)) = z$ si $z \in \overline{D}$.

On fixe dans toute la suite un élément f de $\mathcal{F}$.

5. Montrer que $f^{-1}(0)$ est un ensemble fini de D.
6. Montrer que si a est un zéro de f alors il existe $g \in \mathcal{F}$ tel que $f = gh_a$.
7. Montrer qu'il existe $a_1, ..., a_n$ dans D et δ de module 1 tels que $f = \delta \prod_{i=1}^{n} h_{a_i}$.

III. Soit $U = \{\mathcal{I}mz > -1\}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ analytique, injective telle que $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ et que $f(0) = 0$. On pose $U_0 = \{|\mathcal{I}mz| < 1\}$ et $W = f(U_0)$.

1. Montrer qu'il existe $F \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ telle que $F(z) = f(z)$ et $\overline{F(\overline{z})} = f(z)$ si $z \in U$.
2. Montrer que $F'(0) \neq 0$ et que F est ouverte.
3. Montrer que W est ouvert et que si $w \in W$ alors $\overline{w} \in W$.
4. Montrer que si $w \in W$ alors $F^{-1}(w)$ est un singleton de U_0.
5. Montrer que F est linéaire.