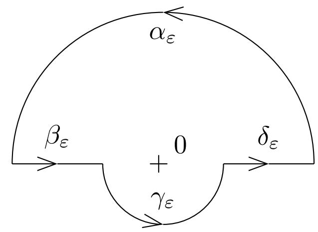
Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - Examen - mai 2004 - 2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits.

I.



Le lacet μ_ε

Si $\varepsilon \in]0,1[$ on note
- $\alpha_\varepsilon(t) = \frac{\exp(it)}{\varepsilon}$ si $t \in [0,\pi]$,
- $\beta_\varepsilon(t) = t$ si $t \in [-\frac{1}{\varepsilon}, -\varepsilon]$,
- $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon \exp(it)$ si $t \in [\pi, 2\pi]$,
- $\delta_\varepsilon(t) = t$ si $t \in [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$,

et μ_ε le lacet obtenu en mettant bout à bout $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon$ et δ_ε.

1. Donner les pôles et les résidus de la fonction $\frac{\exp(iz)}{z}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mu_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz$.
2. Montrer qu'il existe $f, F \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ telles que $\frac{\exp(iz)}{z} - \frac{1}{z} = f = F'$ et en déduire que $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz = i\pi$.
3. Vérifier que $|\int_{\alpha_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta) d\theta$ puis en déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz = 0$ (on admet que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $-\sin\theta \leq -\frac{2\theta}{\pi}$).
4. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt$ existe.
5. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

II. Soit f et g deux fonctions entières telles que $f' = g(f)$.
On pose $g_0(z) = z$ et si $n \in \mathbf{N}$ $g_{n+1} = {g_n}' g$.
1. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $f^{(n)} = g_n \circ f$.
2. Montrer que s'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $f'(z) = 0$ alors f est constante.

On suppose dorénavant $f(0) = f(1) = f(i)$.
3. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = f^{(n)}(i)$.
4. Montrer que si $z \in \mathbf{C}$ alors $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$.
5. Montrer que f est bornée.
6. Montrer que f est constante.

III. On rappelle qu'une fonction analytique définie sur un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ admet des primitives.

Soit $\Omega = \{\mathcal{R}ez > 0\}$ et $f : \Omega \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ analytique. On suppose que f est $2i\pi$-périodique et que la restriction de f à $B = \{\mathcal{R}ez > 0, 0 \leq \mathcal{I}mz < 2\pi\}$ est injective.

1. Dire pourquoi $f(\Omega)$ est un ouvert connexe.
2. Montrer qu'il $H \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $H' = \frac{f'}{f}$ et $\exp H = f$.
3. Montrer que f' ne s'annule pas et que si $f(z) = f(z')$ alors $f'(z) = f'(z')$.
4. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{O}(f(\Omega))$ telle que $g(w) = \frac{1}{f'(v)}$ si $w = f(v)$ et $v \in \Omega$.
5. Montrer que si $f(\Omega)$ était simplement connexe il existerait $G \in \mathcal{O}(f(\Omega))$ telle que $G' = g$ et $G \circ f = z$.
6. En déduire que $f(\Omega)$ n'est pas simplement connexe.

IV. Soit $f : \{\mathcal{I}mz \geq 0\} \to \mathbf{C}$ continue et dont la restriction à $\{\mathcal{I}mz > 0\}$ est holomorphe. On suppose que $f(\{\mathcal{I}mz \geq 0\}) \subset \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$ et que $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.
1. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe F de $\mathbf{C}$ dans $\{\mathcal{R}ez \geq 0\}$.
2. Montrer que $|\frac{1}{1+F}| < 1$.
3. Montrer que f est constante.