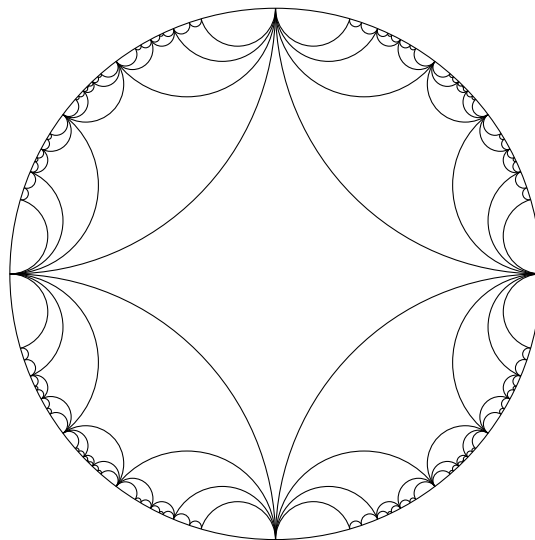


FONCTIONS HOLOMORPHES D'UNE VARIABLE

notes de cours
Jean-Marie Lion



pavage

Bibliographie

- | | |
|--------------|---|
| L. Ahlfors | <i>Complex Analysis</i> |
| K. Bekka | <i>Polycopié d'un cours de fonctions holomorphes</i> |
| H. Cartan | <i>Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une et plusieurs variables</i> |
| B. Chabat | <i>Introduction à l'analyse complexe, tome 1</i> |
| P. Dolbeault | <i>Analyse complexe</i> |
| M. Hervé | <i>Fonctions analytiques</i> |
| B. Iversen | <i>Hyperbolic Geometry</i> |
| L. Nehari | <i>Conformal Mapping</i> |
| W. Rudin | <i>Analyse réelle et complexe</i> |
| G. Valiron | <i>Théorie des fonctions</i> |
| A. Yger | <i>Analyse complexe et distributions</i> |

Introduction

Notations 1 On désigne par \mathbf{C} le corps des complexes. Si $z \in \mathbf{C}$, on note $\Re(z)$ ou x sa partie réelle et $\Im(z)$ ou y sa partie imaginaire, son conjugué \bar{z} est $\bar{z} = x - iy$. On note aussi $|z|$ le module de z : $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ et $|z| \geq 0$. On identifie parfois $(\mathbf{C}, || \cdot ||)$ orienté en considérant $(1, i)$ directe et le plan euclidien orienté \mathbf{R}^2 . Il a une correspondance biunivoque entre les similitudes directes du plan euclidien orienté et les nombres complexe. Si $\lambda \in \mathbf{C}$, l'application $z \mapsto \lambda z$ est

une similitude directe et si $|\lambda| = 1$ c'est une rotation. On désigne par $dx, dy, dz, d\bar{z}$ les applications linéaires suivantes : $dx \cdot (\alpha, \beta) = \alpha, dy \cdot (\alpha, \beta) = \beta$ si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $dz \cdot u = u, d\bar{z} \cdot u = \bar{u}$ si $u \in \mathbf{C}$. Si $r \in [0, +\infty]$ et $a \in \mathbf{C}$ on pose $D_r(a) = \{|z - a| < r\}, S_r(a) = \{|z - a| = r\}$ et parfois $D_r(0)$ est noté D_r et $S_r(0)$ est noté S_r . L'axe réel est la droite $\{Im z = 0\}$ identifiée avec $\mathbf{R} \times \{0\}$. L'axe imaginaire est l'axe $i\mathbf{R} = \{\Re z = 0\}$.

Définition 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}, f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ continue et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est **C-dérivable** en z_0 s'il existe $l \in \mathbf{C}$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = l$. Cette limite notée $f'(z_0)$ s'appelle la **C-dérivée** de f en z_0 . On dit que f est **holomorphe** (ou **C-dérivable**) sur Ω si f est C-dérivable en tout point de Ω .

Exemples 1 (de fonctions holomorphes)

- les fonctions constantes
- $\Omega = \mathbf{C}, f = z^p$ avec $p \in \mathbf{N}^*$: alors

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^p - z^p}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^p (z+h)^{k-1} z^{p-k} = pz^{p-1}.$$

- $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}, f = \frac{1}{z^p}$ avec $p \in \mathbf{N}^p$: alors

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(z+h)^p} - \frac{1}{z^p}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p - (z+h)^p}{z^p(z+h)^p h} = \frac{-p}{z^{p+1}}.$$

Exemples 2 (de fonctions qui ne sont pas holomorphes)

- $\Omega = \mathbf{C}$ et $f = \bar{z}$.
- $\Omega = \mathbf{C}$ et $f = x$.
- $\Omega = \mathbf{C}$ et $f = y$.

En effet par exemple $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbf{R}\lambda}} \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ dépend de $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Remarque 1 Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ une application continue définie sur un ouvert Ω de \mathbf{C} et soit $z_0 \in \Omega$. Si f est C-dérivable en z_0 alors f , vue comme application définie sur un ouvert de \mathbf{R}^2 est différentiable en z_0 et si $u \in \mathbf{C} (\simeq \mathbf{R}^2)$ alors $df(z_0) \cdot u = f'(z_0)u$.

Dans ce cours on va étudier les fonctions holomorphes.

I Familles sommables

Notation 2 Si $(a_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ on pose $\|(a_i)_{i \in I}\| = \sup_{F \subset I, F \text{ fini}} \sum_{i \in F} |a_i|$.

On peut s'assurer que

Proposition 1 Si $(a_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I, (b_i)_{i \in I} \in \mathbf{C}^I$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ alors

- 0) Tous les a_i sont nuls ssi $\|(a_i)_{i \in I}\| = 0$.
- 1) Si $J \subset I$ alors $\|(a_i)_{i \in J}\| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$.
- 2) $\|(\lambda a_i)_{i \in I}\| = |\lambda| \|(a_i)_{i \in I}\|$.
- 3) $\|(a_i)_{i \in I_1}\| + \|(a_i)_{i \in I_2}\| = \|(a_i)_{i \in I}\|$ si (I_1, I_2) est une partition de I .
- 4) Si pour tout $i \in I$ on a $|a_i| \leq |b_i|$ alors $\|(a_i)_{i \in I}\| \leq \|(b_i)_{i \in I}\|$.
- 5) $\|(a_i + b_i)_{i \in I}\| \leq \|(a_i)_{i \in I}\| + \|(b_i)_{i \in I}\|$.
- 6) $\|(a_i)_{i \in I}\| \leq \|(\Re a_i)_{i \in I}\| + \|(Im a_i)_{i \in I}\|$.

Définition 2 On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est *sommable de somme* $S \in \mathbf{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $F_\varepsilon \subset I$ fini tel que si $F \subset I$ fini et $F_\varepsilon \subset F$ alors $|S - \sum_{i \in F} a_i| < \varepsilon$.

Remarque 2 Si $(a_i)_{i \in I}$ de sommes S et S' alors $S = S'$. En effet si $\varepsilon > 0$, en considérant la réunion de F_ε et F'_ε associés à S et S' on obtient

$$|S - S'| \leq |S - \sum_{i \in F_\varepsilon \cup F'_\varepsilon} a_i| + |S' - \sum_{i \in F_\varepsilon \cup F'_\varepsilon} a_i| < 2\varepsilon.$$

Notation 3 Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable de somme S on pose $\sum_{i \in I} a_i = S$.

Définition 3 Si $\|(a_i)_{i \in I}\| < +\infty$, on dit que $(a_i)_{i \in I}$ est *absolument sommable*.

Proposition 2 Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable de somme S alors $(a_i)_{i \in I}$ est absolument sommable.

Preuve On pose $I_r^+ = \{i \in I : \Re a_i > 0\}$, $I_r^- = \{i \in I : \Re a_i \leq 0\}$, $I_i^+ = \{i \in I : \Im a_i > 0\}$, $I_i^- = \{i \in I : \Im a_i \leq 0\}$. On remarque que

$$\|(a_i)_{i \in I}\| \leq \|(\Re a_i)_{i \in I_r^+}\| + \|(\Re a_i)_{i \in I_r^-}\| + \|(Im a_i)_{i \in I_i^+}\| + \|(Im a_i)_{i \in I_i^-}\|$$

et que les quatre termes de la somme sont majorés par $|S| + 1 + \|(a_i)_{i \in F_1}\|$. Par exemple si $F_r^+ \subset I_r^+$ fini alors $\|(\Re a_i)_{i \in F_r^+}\| = \sum_{i \in F_r^+} \Re a_i$ est majoré par $|\sum_{i \in F_r^+} a_i|$ donc par $|\sum_{i \in F_r^+ \cup F_1} a_i| + \|(a_i)_{i \in F_1}\|$ et $|\sum_{i \in F_r^+ \cup F_1} a_i| \leq |S| + 1$.

•

Remarque 3 La famille $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i \geq 0} a_i$ est absolument convergente. En revanche il se peut que la série $\sum_{i \geq 0} a_i$ soit convergente sans que la famille $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ soit sommable.

Exemple 3 $(\frac{(-1)^i}{i})_{i \in \mathbf{N}}$ n'est pas sommable mais $\sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^i}{i}$ est convergente.

Proposition 3 Si $(a_i)_{i \in I}$ est absolument sommable alors $\tilde{I} = \{i \in I : a_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Preuve Sinon il existerait $n \in \mathbf{N}$ tel que $\tilde{I}_n = \{i \in I : |a_i| > 2^{-n}\}$ est non dénombrable et donc $+\infty = \|(a_i)_{i \in \tilde{I}_n}\| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$.

•

Proposition 4 Si $(a_i)_{i \in I}$ est absolument sommable alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $F \in I$ fini tel que $\|(a_i)_{i \in I \setminus F}\| < \varepsilon$.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\|(a_i)_{i \in I}\| < +\infty$ il existe $F \subset I$ fini tel que $\|(a_i)_{i \in I}\| - \varepsilon < \sum_{i \in F} |a_i| = \|(a_i)_{i \in F}\|$. On a alors $\|(a_i)_{i \in I \setminus F}\| < \varepsilon$.

•

Théorème 1 Si $(a_i)_{i \in I}$ est absolument sommable elle est sommable, sa somme S vérifie $|S| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$ et si $F \subset I$ fini alors $|S - \sum_{i \in F} a_i| \leq \|(a_i)_{i \in I \setminus F}\|$.

Preuve On peut supposer I au plus dénombrable. Soit $I_k \subset I_{k+1}$ une famille croissante d'ensembles finis dont la réunion est I . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F_ε fini tel que $\|(a_i)_{i \in I \setminus F_\varepsilon}\| < \varepsilon$. Il existe k_ε tel que si $k \geq k_\varepsilon$ alors $F_\varepsilon \subset I_k$ et donc $\|(a_i)_{i \in I \setminus I_k}\| < \varepsilon$. Si $l \geq k \geq k_\varepsilon$ alors $|\sum_{i \in I_l} a_i - \sum_{i \in I_k} a_i| \leq \sum_{i \in I_l \setminus I_k} |a_i| \leq \|(a_i)_{i \in I \setminus I_k}\| < \varepsilon$.

La suite $S_k = \sum_{i \in I_k} a_i$ est de Cauchy donc convergente. Soit S sa limite. Montrons que S vérifie les conclusions voulues. Déjà, $|S_k| \leq \sum_{i \in I_k} |a_i| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$ et donc $|S| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$. Soit $F \subset I$ fini et soit k assez grand pour que $F \subset I_k$. On a

$$|\sum_{i \in I_k} a_i - \sum_{i \in F} a_i| = |S_k - \sum_{i \in F} a_i| \leq \|(a_i)_{i \in F \setminus F}\| \leq \|(a_i)_{i \in I \setminus F}\|.$$

En passant à la limite on obtient $|S - \sum_{i \in F} a_i| \leq \|(a_i)_{i \in I \setminus F}\|$. En particulier, si $F_\varepsilon \subset F$ alors $|S - \sum_{i \in F} a_i| < \varepsilon$.

•

Remarque 4 La famille $(a_i)_{i \in I}$ est absolument sommable ssi la famille $(a_i)_{i \in \tilde{I}}$ est absolument sommable avec $\tilde{I} = \{i \in I : a_i \neq 0\}$. Leurs sommes sont égales.

Proposition 5 Soit $(a_i)_{i \in I}$ absolument sommable de somme S et $I_k \subset I_{k+1}$ dont la réunion contient $\tilde{I} = \{i \in I : a_i \neq 0\}$. Alors les $(a_i)_{i \in I_k}, k \in \mathbf{N}$ sont absolument sommables de sommes $S_k, k \in \mathbf{N}$ et la suite S_k converge vers S .

Preuve On peut supposer $I = \tilde{I}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F_ε fini tel que $\|(a_i)_{i \in I \setminus F_\varepsilon}\| < \varepsilon$. Il existe k_ε tel que si $k \geq k_\varepsilon$ alors $F_\varepsilon \subset I_k$ et donc $\|(a_i)_{i \in I \setminus I_k}\| < \varepsilon$. Si $k \geq k_\varepsilon$ alors $|S_k - S| \leq \|(a_i)_{i \in I_k \setminus F_\varepsilon}\| + \|(a_i)_{i \in I \setminus F_\varepsilon}\| < 2\varepsilon$.

•

Théorème 2 Soit $(a_i)_{i \in I}$ absolument sommable de somme S et $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I . Alors les familles $(a_i)_{i \in I_\lambda}, \lambda \in \Lambda$ sont absolument sommables et si on note $S_\lambda, \lambda \in \Lambda$ leurs sommes, $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est absolument sommable de somme S . En d'autres termes $\sum_{\lambda \in \Lambda} (\sum_{i \in I_\lambda} a_i) = \sum_{i \in I} a_i$.

Preuve On peut supposer I et donc Λ au plus dénombrables.

Soit $\Lambda' \subset \Lambda$ fini. On a $\sum_{\lambda \in \Lambda'} \|(a_i)_{i \in I_\lambda}\| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$. Donc les $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ sont sommables et leurs sommes S_λ vérifient $\sum_{\lambda \in \Lambda'} |S_\lambda| \leq \|(a_i)_{i \in I}\|$ quelque soit $\Lambda' \subset \Lambda$ fini. Par conséquent $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable. On pose $S' = \sum_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda$.

Montrons $S = S'$. Soit $\varepsilon > 0$.

(1) Il existe $F \subset I$ fini tel que $\|(a_i)_{i \in I \setminus F}\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

(2) Il existe $\Lambda' \subset \Lambda$ fini tel que $\|(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $F \subset \cup_{\lambda \in \Lambda'} I_\lambda$.

(3) Si $\lambda \in \Lambda'$ il existe $F_\lambda \subset I_\lambda$ fini tel que $|S_\lambda - \sum_{i \in F_\lambda} a_i| < \frac{\varepsilon}{3 \text{Card} \Lambda'}$ et $F \cap I_\lambda \subset F_\lambda$.

Alors on a $|S - \sum_{\lambda \in \Lambda'} \sum_{i \in F_\lambda} a_i| \leq \|(a_i)_{i \in I \setminus F}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ d'après (1), (2) et (3).

On a aussi $|\sum_{\lambda \in \Lambda'} (\sum_{i \in F_\lambda} a_i - S_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}$ d'après (3).

On a enfin $|\sum_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda - S'| < \frac{\varepsilon}{3}$ d'après (2).

En sommant on obtient si $\varepsilon > 0$

$$|S - S'| \leq |S - \sum_{\lambda \in \Lambda'} \sum_{i \in F_\lambda} a_i| + |\sum_{\lambda \in \Lambda'} (\sum_{i \in F_\lambda} a_i - S_\lambda)| + |\sum_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda - S'| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que $S = S'$.

•

Remarque 5 Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I . Il est possible que les $(a_i)_{i \in I_\lambda}, \lambda \in \Lambda$ soient absolument sommables de sommes $S_\lambda, \lambda \in \Lambda$ et $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ absolument sommable sans que $(a_i)_{i \in I}$ soit sommable. C'est le cas par exemple si $I = \mathbf{N}, a_i = (-1)^i, \Lambda = \mathbf{N}$ et $I_\lambda = \{2\lambda, 2\lambda + 1\}$. Cependant on a :

Proposition 6 Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I . Si les $(a_i)_{i \in I_\lambda}, \lambda \in \Lambda$ sont absolument sommables et si $(\|(a_i)_{i \in I_\lambda}\|)_{\lambda \in \Lambda}$ est absolument sommable alors $(a_i)_{i \in I}$ est absolument sommable.

Preuve Si $F \subset I$ fini et si $\Lambda' \subset \Lambda$ fini tel que $F \subset \cup_{\lambda \in \Lambda'} I_\lambda$ alors
 $\sum_{i \in F} |a_i| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda'} \| (a_i)_{i \in I_\lambda} \| \leq \| (\| (a_i)_{i \in I_\lambda} \|)_{\lambda \in \Lambda'} \| < +\infty$.
 En passant au sup on obtient $\| (a_i)_{i \in I} \| \leq \| (\| (a_i)_{i \in I_\lambda} \|)_{\lambda \in \Lambda} \| < +\infty$.

•

On déduit de ce qui précède un énoncé qui a un parfum de Fubini.

Théorème 3 Si $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est absolument sommable alors

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right).$$

Exemple 4 Si $a_{i,j} = 0$ si $(i,j) \in \mathbf{N}^2, j \neq i, i+1$ et $a_{i,i} = 1, a_{i,i+1} = -1$ alors $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = 0$ alors que $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right) = 1$. Par conséquent $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbf{N}^2}$ n'est pas absolument sommable.

Voici un corrolaire aux résultats précédents.

Corollaire Soit $(a_i)_{i \in I}, (a'_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ absolument sommables de sommes A, A' et B . Alors $(\lambda a_i)_{i \in I}, (a_i + a'_i)_{i \in I}$ et $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ sont absolument sommables de sommes $\lambda A, A + A'$ et AB .

Remarque 6 Les notions de familles sommables et absolument sommables s'étendent aux espaces vectoriels normés. Une famille absolument sommable d'un espace de Banach est sommable. Ce n'est pas vrai dans $\mathbf{C}[X]$ muni de la norme définie par $N_1(a_0 + \dots + a_d X^d) = |a_0| + \dots + |a_d|$. Par exemple la famille $(X^n/n!)_{n \in \mathbf{N}}$ est absolument sommable mais pas sommable. Dans un espace de dimension infinie une famille peut être sommable sans être absolument sommable. Considérons par exemple l'espace $l^\infty(\mathbf{C})$ des suites de complexes bornées muni de la norme définie par $N_\infty((t_n)_{n \in \mathbf{N}}) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |t_n|$ et qui en fait un espace de Banach. La famille $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ définie par $a_{i,i} = \frac{1}{i+1}$ et $a_{i,n} = 0$ si $i \neq n$ est sommable de somme la suite $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ mais elle n'est pas absolument sommable.

Proposition 7 Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions définies sur $E \subset \mathbf{C}$, à valeurs complexes, continues et bornées. On suppose que $(\sup_{z \in \Omega} |f_i(z)|)_{i \in I}$ est une famille absolument sommable. Alors pour tout $z \in E$, $(f_i(z))_{i \in I}$ est absolument sommable et sa somme $F(z)$ est une fonction continue sur E .

Preuve On peut supposer $I = \mathbf{N}$. Les hypothèses impliquent que la série $\sum_{i \geq 0} f_i$ converge normalement donc uniformément vers une fonction continue.

•

II Séries entières, rayon de convergence, fonctions analytiques

Définition 4 Une *série formelle* A est une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} A_n$ dont le terme général est de la forme $A_n : z \in \mathbf{C} \mapsto A_n(z) = a_n z^n$ où $a_n \in \mathbf{C}$. La série A est notée $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Le coefficient a_0 s'appelle le *terme constant* de A . On dit que A est *constante* si $A = a_0$.

Exemples 5

- Les polynômes $a_0 + \dots + a_n z^n$.

- La série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z_0^n}$ avec $z_0 \in \mathbf{C}^*$.
- La série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.
- La série d'Euler $\sum_{n \geq 0} n! z^{n+1}$.

Définition 5 Le rayon de convergence R (ou *rayon*) de la série formelle $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est

$$R = \sup \left\{ r \in [0, +\infty[: \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty \right\}.$$

Remarque 7 Le rayon R appartient à $[0, +\infty]$.

Définition 6 Si le rayon de $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est non nul on dit que A est une *série entière*.

Notation 4 On note $\mathbf{C}[[z]]$ l'ensemble des séries formelles et $\mathbf{C}\{z\}$ le sous-ensemble de $\mathbf{C}[[z]]$ composé des séries entières.

Proposition 8 (Hadamard) Le rayon R de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = \liminf_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{-1/n}$.

Remarque 8 Bien sur on prend ici la convention $1/0 = +\infty$.

Théorème 4 (Abel et Riemann) Soit $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$. Alors :

1. Si $r > R$ la suite $|a_n| r^n$ est non bornée. Par conséquent si $|z| > R$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge. En revanche si $r < R$ la suite $|a_n| r^n$ tend vers 0.
2. Il existe une fonction continue $\mathbf{A} : D_R \rightarrow \mathbf{C}$ telle que si $K \subset D_R$ est compact, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ restreinte à K converge normalement vers la restriction de \mathbf{A} à K .
3. La fonction \mathbf{A} est \mathbf{C} -dérivable en 0, $\mathbf{A}(0) = a_0$ et $\mathbf{A}'(0) = a_1$.

Notation 5 La fonction \mathbf{A} est aussi notée $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. C'est la *somme* de la série entière sur son *disque de convergence* D_R .

Définitions 7

- Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ définie sur un ouvert de \mathbf{C} est *développable en série entière* en $z_0 \in \Omega$ s'il existe $A \in \mathbf{C}\{z\}$ de rayon $R > 0$ et $r \in]0, R]$ tels que $D_r(z_0) \subset \Omega$ et si $z \in D_r(z_0)$ alors $f(z) = \mathbf{A}(z - z_0)$.
- La fonction f est *analytique* sur Ω si f est développable en série entière en tout $z_0 \in \Omega$.
- Une fonction analytique sur \mathbf{C} est appelée *fonction entière*.

Notation 6 On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur un ouvert Ω de \mathbf{C} .

D'après le résultat d'Abel on a :

Théorème 5 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est analytique alors elle est holomorphe.

La réciproque est vraie et sera démontrée ultérieurement à l'aide la théorie de Cauchy.

Définition 8 Soit $f_1 \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ et $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ et soit $z_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. On dit que $f_1 \text{Rel}_{z_0} f_2$ si f_1 et f_2 coïncident sur un voisinage de z_0 . La relation Rel_{z_0} est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence s'appelle *germe* de fonction analytique en z_0 . L'ensemble des germes de fonctions analytiques en z_0 est noté \mathcal{O}_{z_0} . On verra plus loin qu'il y a une bijection naturelle entre \mathcal{O}_{z_0} et $\mathbf{C}\{z\}$.

Exemples 6

- le rayon de convergence de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z_0^n}$ est $|z_0|$ et si $|z| < |z_0|$ alors $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z_0^n} = \frac{z_0}{z_0 - z}$. Par conséquent la fonction $1/z$ est une fonction analytique sur \mathbf{C}^* .
- le rayon de convergence de la série exponentielle est $+\infty$. Sa somme appelée *exponentielle* et notée *exp*.
- le rayon de convergence de la série d'Euler est 0.

Preuve des énoncés de Hadamard, Abel et Riemann Soit $0 \leq r < \liminf |a_n|^{-1/n}$. Montrons que $r < R$. Soit $r' \in]r, \liminf |a_n|^{-1/n}[$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ est plus grand que N alors $|a_n|^{-1/n} > r'$ et donc $|a_n| r^n < (r/r')^n$. Ainsi à partir du rang N le terme général de la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ est majoré par le terme général de la série géométrique de raison $r/r' \in [0, 1[$. Cette série géométrique est convergente et donc $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty$. Ainsi $R \geq \liminf |a_n|^{-1/n}$.

Soit $r > \liminf |a_n|^{-1/n}$. Montrons que $|a_n| r^n$ est non bornée (ceci implique que $R \leq \liminf |a_n|^{-1/n}$). Soit $r' \in]\liminf |a_n|^{-1/n}, r[$. Il existe une suite strictement croissante $n_k, k \in \mathbf{N}$ telle que $|a_{n_k}|^{-1/n_k} < r'$ et donc $(r/r')^{n_k} < |a_{n_k}| r^{n_k}$. Puisque $r/r' > 1$ on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} (r/r')^{n_k} = +\infty$. Par conséquent la suite $|a_n| r^n$ est non bornée.

On a donc prouvé le résultat d'Hadamard et le premier point du résultat d'Abel et Riemann : $R = \liminf_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{-1/n}$.

Considérons toujours $0 \leq r < \liminf |a_n|^{-1/n} = R$. Puisque $|a_n| r^n = \sup_{\overline{D_r}} |a_n z^n|$, la restriction de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ à $\overline{D_r}$ converge normalement vers une fonction continue notée \mathbf{A}_r . De plus si $r < r' < \liminf |a_n|^{-1/n}$ alors la restriction de $\mathbf{A}_{r'}$ à $\overline{D_r}$ coïncide avec \mathbf{A}_r . La fonction $\mathbf{A} : D_R \rightarrow \mathbf{C}$ recherchée coïncide donc avec \mathbf{A}_r en restriction à $\overline{D_r}$.

Le calcul de $\mathbf{A}(0)$ est immédiat. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ est le même que celui de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et si $z \neq 0$ est dans le disque de convergence alors $\frac{\mathbf{A}(z) - \mathbf{A}(0)}{z} = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$. Ainsi $\mathbf{A}'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(z) - \mathbf{A}(0)}{z} = a_1$.

•

1ère conséquence Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$. Si $r \in]0, R[$ il existe $K > 0$ tel que $|a_n| < K r^{-n}$.

2ème conséquence Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul alors $\sum_{n \geq 0} (a_n \lambda^n) z^n$ est de rayon $R/|\lambda|$ et si $|z| < R/|\lambda|$ alors $\sum_{n \geq 0} (a_n \lambda^n) z^n = \mathbf{A}(\lambda z) = \sum_{n \geq 0} a_n (\lambda z)^n$

Application Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$. On suppose $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Alors il existe $r > 0$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} b_n z^n = \frac{1}{r a_1} \sum_{n \geq 0} (a_n r^n) z^n$ est de rayon supérieur à 1 et vérifie $b_1 = 1$ et $|b_n| \leq 1$.

3ème conséquence Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$. Alors $\sum_{n \geq 0} \overline{a_n} z^n$ est de rayon R et si $|z| < R$ alors $\overline{\mathbf{A}(z)} = \sum_{n \geq 0} \overline{a_n} \overline{z}^n$. Si tous les coefficients a_n sont réels alors $\mathbf{A}(] - R, R[) \subset \mathbf{R}$.

Application Si $z \in \mathbf{C}$ alors $\exp \overline{z} = \overline{\exp z}$. De plus $\exp(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.

III Propriétés des séries formelles

Définition 9 (Calculs formels - sans hypothèse de convergence)

Soit $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $B = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors on pose $\lambda A = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$, $A + B = C = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$, $AB = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k+l=n} a_k b_l) z^n$, $A' = A^{(1)} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ et par récurrence, $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ si $n \in \mathbf{N}$. On pose aussi $A^{(-1)} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Exemple 7 $(1 - z) \sum_{n \in \mathbf{N}} z^n = (\sum_{n \in \mathbf{N}} z^n)(1 - z) = 1$ dans $\mathbf{C}[[z]]$.

Définition 10 (Topologie de Krull) Si $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \neq 0$ on appelle *ordre* de A et on note $\omega(A)$ le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$. On pose $\omega(0) = +\infty$. Si $A, B \in \mathbf{C}[[z]]$ alors la distance de Krull entre A et B est $d_{\text{Krull}}(A, B) = 2^{-\omega(A-B)}$. Muni de cette distance $\mathbf{C}[[z]]$ est un espace métrique. C'est le *complété au sens de Krull* de l'espace des polynômes $\mathbf{C}[z]$ muni des mêmes lois, de la dérivation des polynômes et de la topologie de Krull.

Théorème 6 L'ensemble $\mathbf{C}[[z]]$ muni des opérations précédentes est une \mathbf{C} -algèbre commutative intègre et différentielle. En particulier $(AB)' = A'B + AB'$ (Leibniz) et $\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B)$ si $A, B \in \mathbf{C}[[z]]$. Le morphisme de dérivation est surjectif et son noyau est l'ensemble des séries constantes. De plus si $A \in \mathbf{C}[[z]]$ alors $A - (A^{(1)})^{(-1)} = a_0$ et $A = (A^{(-1)})^{(1)}$.

Proposition 9 (Formule de Taylor) Si $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbf{C}[[z]]$ alors $a_n = A_0^{(n)} / n!$ où $A_0^{(n)}$ désigne le terme constant de la série dérivée n -ième $A^{(n)}$ de A .

Preuve Ces résultats sont vrais dans $\mathbf{C}[z]$ et l'addition, la multiplication par un scalaire ou par une série formelle ainsi que la dérivation et l'anti-dérivation sont des opérations continues au sens de Krull. Tous passe donc au complété.

•

Composition Soit $A, B \in \mathbf{C}[[z]]$ et soit A_n, B_n des suites de polynômes qui convergent vers A et B au sens de Krull. On suppose de plus que le terme constant a_0 de A est nul. Alors la suite des composés $B_n \circ A_n$ est une suite de polynômes qui converge au sens de Krull vers une série formelle notée $B \circ A$. Cette série est indépendante des suites A_n et B_n . De plus

$$B \circ A = b_0 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{l=1}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = n \\ k_i \neq 0}} b_l a_{k_1} \dots a_{k_l} \right) z^n.$$

On déduit de l'associativité de la composition pour les polynômes la même propriété pour les séries formelles : si $A, B, C \in \mathbf{C}[[z]]$ et $a_0 = b_0 = 0$ alors le terme constant de $B \circ A$ est nul et $C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$. La règle de dérivation des composées de polynômes passe à la limite : $(B \circ A)' = (B' \circ A)A'$.

Remarque 9 Supposer que $a_0 = 0$ est fondamental. En effet, la composition des polynômes n'est pas continue au sens de Krull. Par exemple lorsque n tend vers $+\infty$ la composée des $\frac{1}{n} = P_n \circ T$ où $P_n = \frac{z^n}{n}$ et $T = 1$ ne converge pas au sens de Krull alors que P_n tend vers 0 au sens de Krull.

Proposition 10 (inverse pour la multiplication) Soit $A \in \mathbf{C}[[z]]$ tel que $a_0 \neq 0$. Alors il existe une unique $B \in \mathbf{C}[[z]]$ tel que $AB = BA = 1$. On a $B' = -A'/A^2$. En particulier $b_0 = \frac{1}{a_0}$ et $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$.

Preuve $A = a_0(1 - C)$ avec $c_0 = 0$. Alors $B = \frac{1}{a_0}D$ où D est la série obtenue en composant $\sum_{n \geq 0} z^n$ et C . Les calculs de B' , b_0 et b_1 sont immédiats.

•

Remarque 10 Ce résultat implique que l'ensemble des séries formelles A dont le terme constant a_0 est non nul muni de la multiplication est un groupe commutatif.

Exemple 8 On vérifie par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que la dérivée k ème $(\frac{1}{1-z})^{(k)}$ de la série formelle $(\frac{1}{1-z})$ est la série formelle $\frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$. Par conséquent on obtient l'identité formelle remarquable

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k) z^n.$$

Proposition 11 (inverse pour la composition) Soit $A \in \mathbf{C}[[z]]$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Il existe un unique B tel que $A \circ B = B \circ A = z$. On a $b_1 = 1/a_1$ et si $a_1 = 1$ alors $b_n = -\sum_{l=2}^n \sum_{\substack{k_1+\dots+k_l=n \\ k_i \neq 0, n}} a_l b_{k_1} \dots b_{k_l}$ si $n \geq 2$. De plus $B' = \frac{1}{A' \circ B}$.

Remarque 11 Ainsi l'ensemble des séries formelles A telles que $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ muni de la composition forme un groupe (non commutatif).

Preuve Puisque \circ est associatif il suffit de rechercher un inverse à droite, c'est à dire B tel que $A \circ B = z$. Quitte à composer à droite A par z/a_1 on peut supposer que $a_1 = 1$. On cherche $B = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n$ tel que $A \circ B = z$. En développant on trouve que les $b_n, n \geq 2$ sont solutions de

$$b_n + \sum_{l=2}^n \sum_{\substack{k_1+\dots+k_l=n \\ k_i \neq 0, n}} a_l b_{k_1} \dots b_{k_l} = 0.$$

L'inverse de A existe bien et ses coefficients sont bien ceux donnés dans la proposition. Le calcul de la dérivée de l'inverse pour la composition est facile.

•

Proposition 12 Soit $d \in \mathbf{N}, d \geq 1$, et $\mathcal{E}_d = \sum_{n \geq 1} (\frac{1}{d} - 0) \dots (\frac{1}{d} - (n-1)) \frac{1}{n!} z^n$. Alors $\mathcal{E}_d \in \mathbf{C}\{z\}$ et $(1 + \mathcal{E}_d)^d = 1 + z$ formellement.

Preuve $(1+z)^d - 1 = A$ vérifie $a_0 = 0, a_1 = d \neq 0$. Il existe donc B tel que $A \circ B = z$ et $b_0 = 0$, c'est à dire $(1+B)^d = 1+z$. De plus B est unique. Pour voir que $B = \mathcal{E}_d$ il suffit donc de comparer les séries termes à termes. En dérivant on obtient $d(1+B)^{d-1} B' = 1$ et donc $B' = (\frac{1}{d} - 0)(1+B)^{1-d}$. Par récurrence on obtient $B^{(n)} = (\frac{1}{d} - 0) \dots (\frac{1}{d} - (n-1))(1+B)^{1-nd}$. En identifiant les premiers termes des deux séries on obtient $B_0^{(n)} = (\frac{1}{d} - 0) \dots (\frac{1}{d} - (n-1))$ et donc $b_n = (\frac{1}{d} - 0) \dots (\frac{1}{d} - (n-1)) \frac{1}{n!}$ si $n \geq 1$. Il est facile de vérifier que le rayon de convergence de \mathcal{E}_d est 1.

•

Proposition 13 (Modèle d'une série formelle) Soit $A \in \mathbf{C}[[z]]$ non nulle, telle que $a_0 = 0$ et soit d son ordre. Alors il existe $B, C \in \mathbf{C}[[z]]$ de la forme $B = z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n$ et $C = \sum_{n \geq 1} c_n z^n$ tels que $A = a_d B^d = a_d (1+C) z^d$.

Preuve On prend $C \in \mathbf{C}[[z]]$ défini par $c_0 = 0, c_n = \frac{a_{n+d}}{a_d}$ si $n > 0$. On sait qu'il existe $\mathcal{E}_d \in \mathbf{C}[[z]]$ tel que $1+z = (1+\mathcal{E}_d)^d$. On pose $B = z(1+\mathcal{E}_d \circ C)$.

•

IV Propriétés des séries entières et des fonctions analytiques

Proposition 14 Soit $A, B \in \mathbf{C}\{z\}$ de rayons $R_A \leq R_B$. Alors $C = A + B$ et $D = AB$ sont dans $\mathbf{C}\{z\}$ et leurs rayons sont supérieurs ou égaux à R_A . Ainsi $\mathbf{C}\{z\}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[[z]]$. De plus si $|z| < R_A$ alors $\mathbf{C}(z) = \mathbf{A}(z) + \mathbf{B}(z), \mathbf{D}(z) = \mathbf{A}(z)\mathbf{B}(z)$.

Preuve Cette proposition découle immédiatement des résultats sur les familles absolument sommables.

•

Théorème 7 (composition des séries entières) Soit $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R_A > 0$ et $B = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayon R_B et soit $r \in]0, R_A[$ tel que $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < R_B$. Alors

1. Si $n \in \mathbf{N}$ la famille $(b_l a_{k_1} \dots a_{k_l})_{\substack{l \in \mathbf{N} \\ k_1 + \dots + k_l = n}}$ est absolument sommable de somme c_n .
2. La série $C = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ a un rayon minoré par r
3. Si $|z| < r$ alors $\mathbf{C}(z) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}(z)$.

Remarque 12 en particulier on a $c_0 = \sum_{n \geq 0} b_n a_0^n$ et $c_1 = (\sum_{n \geq 0} (n+1) b_{n+1} a_0^n) a_1$.

Preuve On pose $K_1 = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n, K_2 = \sum_{n \geq 0} b_n K_1^n$. On a $K_1, K_2 < +\infty$. Soit $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^{N_1} \left(\sum_{l=0}^{N_2} \sum_{k_1 + \dots + k_l = n} |b_l a_{k_1} \dots a_{k_l}| r^n \right) \leq \sum_{l=0}^{N_2} |b_l| \left(\sum_{k=0}^{N_1} |a_k| r^k \right)^l \leq \sum_{l=0}^{N_2} |b_l| K_1^l \leq K_2.$$

Ainsi $(b_l a_{k_1} \dots a_{k_l} r^n)_{\substack{l \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N} \\ k_1 + \dots + k_l = n}}$ est absolument sommable et si n est fixé $(b_l a_{k_1} \dots a_{k_l})_{\substack{l \in \mathbf{N} \\ k_1 + \dots + k_l = n}}$ est absolument sommable et sa somme c_n vérifie $\sum_{n \geq 0} |c_n| r^n \leq K_2$.

Ceci prouve 1. et 2.

Prouvons 3. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < r$. La famille $(b_l a_{k_1} \dots a_{k_l} z^n)_{l \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}, k_1 + \dots + k_l = n}$ est encore absolument sommable. On a donc égalité entre les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \circ \mathbf{A}(z) &= \sum_{l \in \mathbf{N}} b_l \left(\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k z^k \right)^l \\ &= \sum_{l \in \mathbf{N}} b_l \left(\sum_{k_1, \dots, k_l \in \mathbf{N}} a_{k_1} \dots a_{k_l} z^{k_1 + \dots + k_l} \right) \\ &= \sum_{\substack{l, n \in \mathbf{N} \\ k_1 + \dots + k_l = n}} b_l a_{k_1} \dots a_{k_l} z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbf{N}} \left(\sum_{\substack{l \in \mathbf{N} \\ k_1 + \dots + k_l = n}} b_l a_{k_1} \dots a_{k_l} \right) z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n z^n \\ &= \mathbf{C}(z). \end{aligned}$$

•

En composant à droite par une translation on obtient que la somme d'une série entière est analytique.

Corollaire Soit $A \in \mathbf{C}\{z\}$ de rayon $R > 0$ et soit $z_0 \in D_R$. Il existe alors une série $B \in \mathbf{C}\{z\}$ de rayon minoré par $R - |z_0|$ tel que $\mathbf{A}(z_0 + z) = \mathbf{B}(z)$ si $|z| < R - |z_0|$. De plus $b_0 = \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n = \mathbf{A}(z_0)$ et $b_1 = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z_0^n$. Ainsi $\mathbf{A} \in \mathcal{O}(D_R)$.

Proposition 15 Si $A \in \mathbf{C}[[z]]$ alors $B = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n, A' = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ ont même rayon que A . Si ce rayon R est non nul alors $\mathbf{A}(z) = a_0 + z\mathbf{B}(z)$ et $\mathbf{A}'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(z+h) - \mathbf{A}(z)}{h}$ si $|z| < R$.

Preuve Puisque $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = a_0 + z(\sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n)$ on a $R_A \geq R_B$ avec $B = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n$. Puisque $|(n+1)a_{n+1}| \geq |a_{n+1}|$ on a $R_B \geq R_{A'}$. D'après le corollaire précédent (calcul de b_1) $R_{A'} \geq R_A$. Donc $R_A = R_B = R_{A'}$.

Si R_A est non nul il est immédiat que $\mathbf{A}(z) = a_0 + z\mathbf{B}(z)$.

On sait déjà que \mathbf{A} est \mathbf{C} -dérivable à l'origine et que $\mathbf{A}'(0) = a_1$. Par conséquent si $|z| < R_A$ alors $\tilde{\mathbf{A}} = h \mapsto \mathbf{A}(z+h)$ admet un développement en série entière de rayon non nul, $\tilde{\mathbf{A}}(h) = \mathbf{A}(z+h) = \sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n h^n$ avec

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n = \tilde{a}_1 = \tilde{\mathbf{A}}'(0) = \mathbf{A}'(z).$$

•

Une conséquence analytique de ces résultats est :

Proposition 16 Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ et $g : \Omega' \rightarrow \mathbf{C}$ analytiques alors $g \circ f$ analytique et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Exemple 9 Les fonctions $\exp \circ \exp$ et $\exp \circ P$ avec P polynôme sont des fonctions entières.

Exemple 10 On a vu que si $p \in \mathbf{N}$ il existe $\varepsilon \in \mathbf{C}\{z\}$ tel que $(1 + \varepsilon)^p = 1$ formellement. D'après ce qui précède c'est vrai sur le disque D_1 qui est le disque de convergence de ε .

Puisque $1/z$ est analytique, on déduit du résultat de composition :

Proposition 17 Soit $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si g n'a pas de zéro alors $f/g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

On a aussi une version pour les séries entières :

Proposition 18 Soit $A, B \in \mathbf{C}\{z\}$. Si $b_0 \neq 0$, il existe $C \in \mathbf{C}\{z\}$ tel que $A = BC$.

Remarques 13 L'ensemble des fonctions analytiques sur Ω et sans zéro sur Ω et l'ensemble des séries entières dont le terme constant a_0 est non nul sont des groupes multiplicatifs (commutatifs).

Proposition 19 (principe des zéros isolés) Soit $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$. Si $A \neq 0$ alors il existe $\varepsilon \in]0, R[$ tel que \mathbf{A} n'a pas de zéro dans $D_\varepsilon \setminus \{0\}$.

Preuve En effet, la série entière A est égale à $z^d B$ où B est une série entière de même rayon que A et de terme constant non nul. Il existe donc $\varepsilon \in]0, R[$ tel que si $z \in D_\varepsilon$ alors $|\mathbf{B}(z)| \geq |\mathbf{B}(0)|/2 > 0$. Si de plus $z \neq 0$ alors $\mathbf{A}(z) = z^d \mathbf{B}(z) \neq 0$.

•

Théorème 8 (principe des zéros isolés) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est analytique non nulle sur Ω connexe et si $K \subset \Omega$ compact alors $f^{-1}(0) \cap K$ est fini.

Preuve L'ensemble $F = f^{-1}(0)$ est un fermé de Ω . D'après le principe des zéros isolés pour les séries entières, l'ensemble F_{acc} des points d'accumulation de F dans Ω est ouvert dans Ω . Or c'est un fermé de Ω inclus dans F . Puisque Ω est connexe, si F_{acc} est non vide alors $F_{acc} = \Omega$ et donc $F = \Omega$. Par conséquent F_{acc} est vide et donc $f^{-1}(0) \cap K$ est fini si $K \subset \Omega$ compact.

•

Remarque 14 Ainsi si Ω est connexe et si $z_0 \in \Omega$ alors l'application qui à $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ associe sa série de Taylor en z_0 est injective.

Ce théorème admet le corollaire suivant.

Corollaire (principe du prolongement analytique) Si f, g analytiques sur Ω connexe coïncident sur un ouvert non vide $U \subset \Omega$ alors elles sont égales.

Puisque deux séries formelles ont même série dérivée si et seulement si elles diffèrent d'une constante on obtient par une récurrence :

Corollaire Soit f, g analytiques sur Ω connexe et $n \in \mathbf{N}$. Si $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ coïncident sur un ouvert non vide $U \subset \Omega$ alors $f - g$ est un polynôme de degré au plus n .

On a aussi :

Corollaire Deux représentants d'un même germe de fonction analytique en z_0 ont même série de Taylor en ce point. Ainsi l'application qui à un germe en z_0 associe la série de Taylor en ce point d'un de ses représentants est bien définie et c'est un isomorphisme entre \mathcal{O}_{z_0} et $\mathbf{C}\{z\}$.

On déduit de ces résultats les conséquences suivantes.

Théorème 9 L'ensemble $\mathbf{C}\{z\}$ est une algèbre différentielle et intègre. De plus si $A \in \mathbf{C}\{z\}$ est de rayon R alors A' à même rayon, \mathbf{A} est holomorphe et analytique sur le disque D_R et A' est la série entière associée à la \mathbf{C} -dérivée \mathbf{A}' de la fonction \mathbf{A} .

Théorème 10 Si Ω est un ouvert non vide et connexe de \mathbf{C} l'ensemble $\mathcal{O}(\Omega)$ est une \mathbf{C} -algèbre différentielle intègre. En particulier les fonctions analytiques sont infiniment \mathbf{C} -dérivables.

Proposition 20 Soit $P \in \mathbf{C}[(z_{i,j})_{i=0,\dots,r, j=0,\dots,s}]$ et A_0, \dots, A_r des séries entières de sommes $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_r$. Alors

$$P((A_i^{(j)})_{i=0,\dots,r, j=0,\dots,s}) = 0$$

dans $\mathbf{C}[[z]]$ si et seulement si

$$P((\mathbf{A}_i^{(j)})_{i=0,\dots,r, j=0,\dots,s}) = 0$$

dans un voisinage de l'origine.

Exemples 11

- La série exponentielle $E = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ vérifie $E = E'$ formellement par conséquent sa somme, l'exponentielle \exp vérifie $\exp = \exp'$.

- La série logarithme de $(1+z)$, $L = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ a pour rayon 1 et vérifie $L' = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$. Par conséquent sa somme noté $\log(1+z)$ est définie sur le disque unité et vérifie $\log'(1+z) = \frac{1}{1+z}$.

- Puisque $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$ sur D_1 et que la dérivée kème de la série formelle associée ($\frac{1}{1-z}$) est la série formelle associée à $\frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$ on a l'identité remarquable

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k) z^n \text{ si } z \in D_1.$$

- Si $A, B \in \mathbf{C}\{z\}$ et $AB = 1$ de sommes \mathbf{A} et \mathbf{B} alors $\mathbf{B}' = -\mathbf{A}'/\mathbf{A}^2$.

Théorème 11 (*inversion locale*) Soit $A = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \in \mathbf{C}\{z\}$ telle que $a_1 \neq 0$. Alors il existe $B = \sum_{n \geq 1} b_n z^n \in \mathbf{C}\{z\}$ tel que $A \circ B = B \circ A = z$. De plus $a_1 b_1 = 1$. En particulier la fonction \mathbf{A} associée à A est un homéomorphisme entre deux voisinages ouverts de l'origine.

Preuve (Méthode des séries majorantes)

Un cas particulier La série $F = z - \sum_{n \geq 2} z^n$ admet 1 comme rayon de convergence et si $|z| < 1$ alors $\mathbf{F}(z) = z - \frac{z^2}{1-z}$. Un calcul montre que si on note \mathcal{E}_2 la série entière (déjà calculée) telle $(1 + \mathcal{E}_2)^2 = 1 + z$ et si on pose $G(z) = (z - \mathcal{E}_2(-6z + z^2))/4$ alors $G(z) \in \mathbf{C}\{z\}$ et $G \circ F = F \circ G = z$. Ca prouve le résultat si $A = F$. Notons que G est l'inverse formel de F . Si on note g_n et f_n les coefficients des séries G et F , alors $f_0 = 0, f_1 = 1$ et $f_n = -1$ si $n \geq 2$, et on a d'après la formule qui donne les coefficients de l'inverse formel, $g_0 = 0, g_1 = 1$ et $g_n = \sum_{l=2}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = n \\ k_i \neq 0, n}} g_{k_1} \dots g_{k_l} \geq 0$ si $n \geq 2$.

Le cas général Comme \circ est associatif il suffit de trouver un inverse à droite. Quitte à composer A par λz à droite et par $z/a_1 \lambda$ à gauche avec $|\lambda|$ petit non nul en module, on peut supposer que $a_1 = 1$ et que $|a_n| \leq 1$ si $n \geq 2$. On sait que A admet un unique inverse B dans $\mathbf{C}[[z]]$. Pour conclure il suffit de montrer que $B \in \mathbf{C}\{z\}$. D'après les résultats formels on sait que $b_1 = 1$ et si $n \geq 2$ alors On sait que $b_n = -\sum_{l=2}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = n \\ k_i \neq 0, n}} a_l b_{k_1} \dots b_{k_l}$ et donc $|b_n| \leq \sum_{l=2}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = n \\ k_i \neq 0, n}} |b_{k_1}| \dots |b_{k_l}|$. Il est alors facile de vérifier par récurrence sur $n \geq 2$ que $|b_n| \leq g_n$. Par conséquent la série G est une série entière.

La propriété d'homéomorphie de \mathbf{A} découle immédiatement de l'inversion de A et de la continuité.

•

Remarque 15 En calculant la dérivée de $A \circ A^{-1} = z$ on obtient $(A^{-1})' = 1/A' \circ A^{-1}$.

Remarque 16 Ainsi l'ensemble des séries entières A telles que $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ muni de la composition forme un groupe (non commutatif).

Proposition 21 (*Modèle local d'une série entière*) Soit $A \in \mathbf{C}\{z\}$ non nulle, telle que $a_0 = 0$ et soit d son ordre. Alors il existe $B, C, D \in \mathbf{C}\{z\}$ de la forme $B = z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n, C = \sum_{n \geq 1} c_n z^n$ et D d'ordre 0 tels que $A = a_d B^d = a_d (1 + C) z^d = D z^d$.

Preuve On reprend la preuve du cas formel, on remarque que C et D obtenues sont des séries entières et puisque \mathcal{E}_d est une série entière on obtient le résultat pour B par composition.

•

Définition 11 Si f est analytique au voisinage de z_0 , on appelle ordre de f en z_0 et on note $\omega_{z_0}(f)$ l'ordre de la série de Taylor de f en z_0 .

On a bien sur $\omega_{z_0}(fg) = \omega_{z_0}(f) + \omega_{z_0}(g)$. On déduit de la proposition précédente la propriété de factorisation suivante.

Proposition 22 Soit $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ non nulles. On suppose qu'en tout point $z \in \Omega$ on a $\omega_z(g) \leq \omega_z(f)$. Il existe alors $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ unique telle que $f = gh$. De plus h est sans zéro si et seulement si $\omega_z(g) = \omega_z(f)$ pour tout $z \in \Omega$.

Preuve On remarque que $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ et d'après le théorème des zéros isolés ce sont des ensembles discrets et fermés de Ω . On définit h sans problème hors de $g^{-1}(0)$. Si $z_i \in g^{-1}(0)$ il

existe un ouvert $U_i \subset \Omega$ contenant z_i et $f_i, g_i \in O(U_i)$ et sans zéro tels que $f = (z - z_i)^{\omega_{z_i}(f)} f_i$ et $g = (z - z_i)^{\omega_{z_i}(g)} g_i$ (en restriction à U_i). Le quotient $\frac{f_i}{g_i}$ est bien analytique et la restriction de h à U_i est égale à $(z - z_i)^{\omega_{z_i}(f) - \omega_{z_i}(g)} \frac{f_i}{g_i}$.

•

V Applications ouvertes et propres

Définitions 12 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Elle est *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y et elle est *propre* si l'image réciproque de tout compact de Y est un compact de X .

Exemple 12 Si $f \in O(\Omega)$ et si f' ne s'annule pas, d'après le théorème d'inversion f est ouverte.

Proposition 23 Si $P(z) = a_0 + \dots + a_d z^d \in \mathbf{C}[z]$ est un polynôme de degré $d \geq 1$ alors P est propre.

Preuve Si $z \neq 0$ alors $P(z) = a_d z^d (1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \dots + \frac{a_0}{a_d z^d})$. Or $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \dots + \frac{a_0}{a_d z^d}| = 1$ donc $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |a_d| |z^d| = +\infty$. Ceci prouve la propriété de P .

•

Lemme 1 Soit $f : X \rightarrow Y$ continue, ouverte et propre entre deux ouverts de \mathbf{C} . Si Y est connexe alors f est surjective.

Preuve Par hypothèse $f(X)$ est un ouvert non vide de Y . Puisque Y est connexe il suffit de montrer que $f(X)$ est fermé dans Y c'est à dire que si $b \in \overline{f(X)} \cap Y$ alors $b \in f(X)$. Fixons donc $b \in \overline{f(X)} \cap Y$. Il existe $z_k \in X$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(z_k) = b$. Puisque f est propre la suite z_k reste dans un compact K de X . On peut donc en extraire une suite convergente z_{k_i} vers un point z_∞ de K donc de X . Par continuité de f on a $f(z_\infty) = b$.

•

Théorème 12 (de D'Alembert et Gauss) Si $P(z) = a_0 + \dots + a_d z^d \in \mathbf{C}[z]$ est un polynôme de degré $d \geq 1$ alors P s'annule.

Preuve Si $d = 1$ alors P s'annule en $-a_0/a_1$. Si $d > 1$ on va montrer que P est surjectif. La dérivée P' est non constante. Les ensembles $P'^{-1}(0)$, $P(P'^{-1}(0))$ et $P^{-1}(P(P'^{-1}(0)))$ sont finis. Les ensembles $Y = \mathbf{C} \setminus P(P'^{-1}(0))$ et $X = \mathbf{C} \setminus P^{-1}(P(P'^{-1}(0)))$ sont donc connexes. Il suffit de montrer que $Y \subset P(\mathbf{C})$. On a $X = P^{-1}(Y)$ et P est propre. Ceci implique que la restriction $P : X \rightarrow Y$ est propre. Elle est aussi ouverte car si $z \in X$, $P'(z) \neq 0$. Par conséquent $P(X) = Y$ car Y connexe.

•

Proposition 24 Si $n \geq 1$ alors z^n est ouverte, propre et surjective.

Preuve (sans utiliser D'Alembert) On pose $f(z) = z^n$. On sait déjà que f est propre. Il suffit donc de montrer qu'elle est ouverte. Soit U un ouvert non vide de \mathbf{C} . On pose $U' = U \setminus \{0\}$. En tout point de U' la dérivée $f'(z) = nz^{n-1}$ est non nulle. D'après le théorème d'inversion locale $f(U')$ est un ouvert. Pour montrer que f est ouverte il suffit donc de montrer que si $r > 0$ alors

l'image du disque D_r contient un voisinage de l'origine. C'est le cas : $f(D_r) = D_{r^n}$ car $f(0) = 0$ et $f : D_r \setminus \{0\} \rightarrow D_{r^n} \setminus \{0\}$ est ouverte et propre donc surjective.

•

Théorème 13 (de l'application ouverte) Si f analytique non constante définie sur un ouvert connexe Ω alors $f(\Omega)$ est ouvert.

Preuve (sans utiliser D'Alembert) Il suffit de montrer que si $z_0 \in \Omega$ il existe un disque $D_r(z_0)$ contenu dans Ω tel que $f(D_r(z_0))$ contient un voisinage de $f(z_0)$. On peut supposer que $z_0 = f(z_0) = 0$ et qu'il existe une série entière $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et r non nul et inférieur au rayon de convergence de A tel que $D_r \subset \Omega$ et f est égal à \mathbf{A} sur D_r . Si f n'est pas constante alors f n'est pas constante au voisinage de 0 et donc l'un des $a_n, n \geq 2$ est non nul. Soit d l'ordre de A . Alors $A = a_d B^d$ avec $a_d \neq 0$, B série entière de la forme $B = z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n$. On déduit du théorème d'inversion locale et de l'ouverture de l'application z^d qu'il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $\mathbf{A}(D_\varepsilon)$ est un voisinage de l'origine.

•

On peut déduire le théorème de D'Alembert à partir du théorème de l'image ouverte. Un polynôme non constant est surjectif car c'est une application propre et ouverte.

On déduit du théorème de D'Alembert-Gauss et de la division euclidienne des polynômes que l'équation $z^n - b = 0$ a exactement n racines si $b \neq 0$. On obtient alors une précision combinatoire sur le modèle local d'une fonction analytique.

Proposition 25 (modèle local d'une série entière - bis) Soit $A = \sum_{n \geq d} a_n z^n \in \mathbf{C}\{z\}$ avec $d \geq 1$ et soit \mathbf{A} sa somme. Si $r > 0$ est assez petit il existe U voisinage ouvert de l'origine et $r > 0$ petit tels que tout $t \in D_r \setminus \{0\}$ a exactement d préimages par \mathbf{A} dans U . De plus, si $z \in U \setminus \{0\}$ alors $\mathbf{A}'(z) \neq 0$.

Preuve Il existe une série entière B de la forme $B = z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n$ tel que $A = a_d B^d$. Soit \mathbf{B} la somme de B . D'après le théorème d'inversion locale, si $\varepsilon > 0$ petit alors il existe un voisinage ouvert U de l'origine tel que \mathbf{B} est un homéomorphisme de U sur D_ε . L'image de D_ε par l'application $z \mapsto a_d z^d$ est le disque D_r recherché avec $r = |a_d| \varepsilon^d$. La condition sur \mathbf{A}' est immédiate car si $\varepsilon > 0$ petit alors U et D_r sont petits.

•

Remarque 17 Cette proposition dit que le modèle local d'une série entière est celui du revêtement ramifié à d feuillettes. On remarque d'abord que si t tend vers 0 alors $\max\{|u| : u \in U, f(u) = t\}$ tend vers 0. Fixons $t_0 \in D_r \setminus \{0\}$. Il existe un voisinage V_0 de t_0 et U_1, \dots, U_d des voisinages deux à deux disjoints des préimages u_1, \dots, u_d de t_0 tels que $\mathbf{A} : U_i \rightarrow V_0$ soit un biholomorphisme. On définit ainsi les réciproques qui paramétrisent holomorphiquement les préimages $u_i(t)$ au voisinage de t_0 . On ne peut pas faire cette paramétrisation sur $D_r \setminus \{0\}$ si $d > 1$. On déduit de la description du modèle local d'une série entière :

Proposition 26 Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si f' s'annule alors f n'est pas injective.

Corollaire Un polynôme P est injectif (ou bijectif) si et seulement si c'est une application affine non constante.

Preuve Les applications affines non constantes sont bijectives. Réciproquement si P est injectif son degré est au moins 1. Si son degré est strictement supérieur à 1 alors P' n'est pas constant et s'annule : ainsi P n'est pas injectif.

•

Application Si $f : \Omega \rightarrow U$ est analytique et bijective alors sa réciproque est analytique. En effet d'après la proposition précédente en tout point de Ω , f' est non nulle et donc localement inversible (dans la classe des fonctions analytiques).

Un autre corollaire du théorème de l'image ouverte est le principe du maximum.

Théorème 14 (Principe du maximum) Soit Ω un ouvert connexe, U un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si la restriction de $|f|$ à U admet un maximum alors f est constante sur Ω .

Preuve Supposons que la restriction de $|f|$ à U admette un maximum en un point z_0 . On pose $|f|(z_0) = R$. Alors $f(U) \subset \overline{D_R}$ et $f(U)$ contient le point $q_0 = f(z_0)$ de module R . Par conséquent $f(U)$ n'est pas un voisinage de q_0 et donc $f(U)$ n'est pas ouvert alors que U est ouvert. Ainsi f n'est pas ouverte alors que Ω est connexe. Donc f est constante.

•

Le principe du maximum admet les variantes suivantes.

Corollaire Si Ω est un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ n'est pas constante alors pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| < \sup_{\Omega} |f|$.

Corollaire Si Ω est un ouvert connexe et relativement compact et si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est non constante se prolonge continument à $\overline{\Omega}$ alors pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| < \sup_{\overline{\Omega} \setminus \Omega} |f|$.

On obtient grâce au principe du maximum la caractérisation suivante des polynômes.

Proposition 27 (Théorème de Liouville) Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vérifie $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{z^d} = 0$ pour un certain $d \in \mathbb{N}$ alors f est un polynôme de degré au plus $d - 1$.

Remarque 18 En particulier si f est bornée alors $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ donc f est constante.

Preuve Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ le polynôme de Taylor de degré $d - 1$ de f en 0. Il existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $z^d g = f - P$. On a $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(z) = 0$. Par conséquent g est nul et $f = P$.

•

Corollaire (Théorème de D'Alembert-Gauss) Si $P(z) = a_0 + \dots + a_d z^d \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $d \geq 1$ alors P s'annule.

Preuve On raisonne par contraposée. Soit P un polynôme qui ne s'annule pas. Puisque P est propre, il existe $m > 0$ tel que $|P(z)| \geq m$ si $z \in \mathbb{C}$. Par conséquent $f = 1/P$ est une fonction entière bornée donc c'est un polynôme constant. Son inverse P est de degré 0.

•

Définition 13 Soit $t \in \mathbb{C}^*$. Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est t périodique si $f(z+t) = f(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ c'est à dire si $f(z+nt) = f(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Une conséquence du principe du maximum est :

Proposition 28 Soit $t_1, t_2 \in \mathbf{C}^*$ et indépendants sur \mathbf{R} (i.e. $t_1/t_2 \notin \mathbf{R}$) et soit f analytique t_1 et t_2 périodique. Alors f est constante.

Preuve On pose $K = \{\lambda t_1 + \mu t_2 : (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2\}$. L'ensemble K est compact par conséquent $f(K)$ est compact. Puisque f est t_1 et t_2 périodique, $f(\mathbf{C}) = f(K)$ et donc $f(\mathbf{C})$ est compact. Ainsi $f(\mathbf{C})$ n'est pas ouvert. La fonction f est donc constante.

•

Une autre conséquence du principe du maximum est :

Proposition 29 (lemme de Schwarz) Soit $f : D_1 \rightarrow D_1$ analytique telle que $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$ et si $z \in D_1$ alors $|f(z)| \leq |z|$. De plus si $|f'(0)| = 1$ ou s'il existe $z_0 \in D_1$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe λ de norme 1 tel que $f(z) = \lambda z$, c'est à dire f est une rotation.

Preuve Puisque $f(0) = 0$ il existe $g \in \mathcal{O}(D_1)$ tel que $f = zg$ et $g(0) = f'(0)$. De plus $|f(z)| \leq 1$ sur D_1 . Soit $z_1 \in D_1$ et $r \in]|z_1|, 1[$. D'après le principe du maximum

$$|g(z_1)| \leq \sup_{D_r} |g(z)| = \sup_{S_r} |g(z)| = (\sup_{S_r} |f(z)|)/r \leq (1/r).$$

Ainsi $|g(z_1)| \leq \min_{r \in]|z_1|, 1[} 1/r = 1$. Si $|f'(0)| = 1$ ou s'il existe $z_0 \in D_1$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors $|g(0)| = 1$ ou $|g(z_0)| = 1$ et donc g est constante égale à un λ avec $|\lambda| = 1$.

•

On déduit du lemme de Schwarz qu'une fonction f entière et bornée est constante. En effet si M majore $|f|$, $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$ alors le lemme de Schwarz appliqué à $\frac{1}{M}f(z_0 + rz)$ assure que $r|f'(z_0)| \leq M$ quelque soit $r > 0$ et donc $f'(z_0) = 0$ en tout point (d'après J. Milnor).

Le lemme de Schwarz est le point central de la preuve du théorème suivant.

Théorème 15 L'ensemble G des restrictions à D_1 des homographies $g_{a,\lambda}, a \in D_1, |\lambda| = 1$ définies par $g_{a,\lambda}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est un groupe de bijections analytiques de D_1 dans lui-même. L'inverse de $g_{a,\lambda}$ est $g_{-\lambda a, \bar{\lambda}}$. De plus toute bijection analytique de D_1 dans lui-même est un élément de G .

Preuve Soit $z, a \in D_1$ et $\lambda \in S_1$. Si $|z| = 1$ alors

$$|g_{a,\lambda}(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{z-a}{z(\bar{z}-\bar{a})} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \right| = 1.$$

Ainsi $g_{a,\lambda}(S_1) \subset S_1$. Or $g_{a,\lambda}$ n'est pas constante. Le principe du maximum implique alors que $g_{a,\lambda}(D_1) \subset D_1$. Un calcul immédiat montre que l'inverse de $g_{a,\lambda}$ est $g_{-\lambda a, \bar{\lambda}}$. Ainsi $g_{a,\lambda}$ est bien une bijection analytique de D_1 dans lui-même et G est un groupe (pour la composition).

Considérons maintenant une bijection analytique g de D_1 dans lui-même. On pose $h = g_{a,1} \circ g$ avec $a = g(0)$. Alors h est une bijection analytique de D_1 dans lui-même qui fixe 0. Si on applique le lemme de Schwarz à h et h^{-1} en $z \in D_1$ et en $h(z)$ on obtient $|h(z)| \leq |z|$ et $|z| = |h^{-1}(h(z))| \leq |h(z)|$ et donc $|z| = |h(z)|$. Toujours d'après le lemme de Schwarz h est donc une rotation et $h \in G$ donc $g = g_{a,1}^{-1} \circ h \in G$.

•

Le groupe G s'appelle le *groupe hyperbolique*. Donnons en une description sommaire. Le calcul qui prouve que les éléments de G laisse invariant S_1 permet de montrer que l'image par une

homographie d'un cercle qui ne passe pas par le pôle de l'homographie est un cercle. On en déduit que l'image d'un cercle qui passe par le pôle est une droite. On constate facilement que l'image d'une droite qui passe par le pôle est une droite époincée alors que l'image d'une droite qui ne passe pas par le pôle est un cercle époincé. Par exemple l'image de \mathbf{R} par l'homographie $\frac{z-i}{z+i}$ est le cercle unité privé de -1 . C'est vrai en particulier pour les éléments de G . On remarque que G agit transitivement sur le disque : par exemple $g_{a,1}$ envoie a sur 0 . Tout élément de G se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{D_1}$. On peut regarder l'action de G sur D_1 ou sur S_1 . Ces deux points de vue complémentaires introduisent un vocabulaire différent pour décrire les mêmes objets. Il y a trois grandes familles d'éléments de $G \setminus \{z\}$:

- Les éléments *elliptiques* ont un seul point fixe dans $\overline{D_1}$ et il est dans D_1 . Ce sont les *rotations hyperboliques*. L'ensemble des elliptiques qui fixent un point donné de D_1 est conjugué au groupe des rotations du plan vectoriel euclidien (privé de l'identité). Il agit sur S_1 de façon conjuguée à l'action du groupe des rotations du cercle.

- Les éléments *paraboliques* ont un seul point fixe dans $\overline{D_1}$ et il est sur S_1 . Ce sont les *hororotations hyperboliques*. L'ensemble des paraboliques qui fixent un point donné de S_1 est conjugué au groupe des translations de \mathbf{R} (privé de l'identité). Tout cercle tangent à S_1 en ce point est globalement invariant par ces éléments paraboliques.

- Les éléments *hyperboliques* ont deux points fixes dans $\overline{D_1}$ et ils sont sur S_1 . Ce sont les *translations hyperboliques*. L'ensemble des hyperboliques qui fixent deux points donnés de S_1 est conjugué au groupe des homothéties positives de \mathbf{R} (privé de l'identité). Les arcs de cercles reliant dans D_1 les deux points fixes sont globalement invariants par ces éléments hyperboliques.

VI Sphère de Riemann, fonctions méromorphes

Définition 14 On appelle *sphère de Riemann* l'espace topologique \mathbf{CP}_1 défini de la façon suivante : \mathbf{CP}_1 est l'espace \mathbf{C} auquel on ajoute un point noté ∞ . La topologie de \mathbf{CP}_1 est engendrée par la topologie de \mathbf{C} et les ensembles $D_r(\infty) = \{|z| > 1/r\} \cup \{\infty\}$, $r > 0$ qui forment une base de voisinages de ∞ .

Propriétés La sphère de Riemann est homéomorphe à la sphère euclidienne \mathbf{S}_{euc} de \mathbf{R}^3 . La *projection stéréographique de pôle sud* \mathbf{pr}_S est un exemple d'homéomorphisme entre les deux sphères. Elle est définie de la façon suivante : l'image du pôle sud $S = (0, 0, -1)$ est $\mathbf{pr}_S(0, 0, -1) = \infty$ et si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}_{\text{euc}} \setminus \{(0, 0, -1)\}$, $\mathbf{pr}_S(x) = \frac{x_1}{1+x_3} + i \frac{x_2}{1+x_3}$. En particulier l'image du pôle nord $N = (0, 0, 1)$ est 0 . L'image par \mathbf{pr}_S de l'hémisphère nord est le disque unité de \mathbf{C} . Cette projection associe à tout point de la sphère autre que le pôle sud l'unique point d'intersection du plan équatorial avec la droite reliant ces deux points. De façon analogue on définit la projection stéréographique de pôle nord \mathbf{pr}_N . L'application $\phi = \mathbf{pr}_N \circ \mathbf{pr}_S^{-1}$ échange 0 et ∞ et $\phi(z) = 1/\bar{z}$. C'est une involution. Enfin on peut vérifier que la projection stéréographique \mathbf{pr}_S est *conforme*, c'est à dire qu'elle respecte les "angles". C'est la raison pour laquelle elle fournit un outil pour faire des cartes de navigation.

Une suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de complexes tend vers ∞ si et seulement si la suite $(1/z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 . Soit $z_0 \in \mathbf{CP}_1$ et $f : D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbf{CP}_1$. L'application f est continue en z_0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in]0, r[$ tel que $f(D_\eta(z_0)) \subset D_\varepsilon(f(z_0))$. En particulier si $f(z_0) = \infty$ c'est équivalent à dire que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ ou encore $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 0$.

La sphère de Riemann s'appelle aussi *droite projective (complexe)*. En voici la raison. Soit π l'application de $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ dans \mathbf{CP}_1 qui à $(u, v) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ associe u/v si $v \neq 0$ et ∞ sinon.

Cette application est continue, surjective et si $z \in \mathbf{C}$, $\pi^{-1}(z)$ est la droite vectorielle épointée $\{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\} : u - zv = 0\}$ alors que $\pi^{-1}(\infty)$ est la droite "horizontale" épointée. La droite projective paramétrise donc l'espace des droites vectorielles de \mathbf{C}^2 vues de l'origine.

Exemples 13 Par prolongement continu, les fractions rationnelles sont des applications continues de \mathbf{CP}_1 dans elle-même appelées encore fractions rationnelles. Ainsi $\frac{1}{0} = \infty$. Les homomorphismes $h = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ sont des homéomorphismes de \mathbf{CP}_1 .

Propriétés Les homomorphismes forment un groupe appelé groupe de Moebius. Il est en bijection avec le groupe $SL_2(\mathbf{C})$ des automorphismes linéaires de \mathbf{C}^2 de déterminant 1. En effet pour des raisons d'homogénéité on peut toujours écrire une homographie h sous la forme $h = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$ et si g est l'automorphisme de \mathbf{C}^2 de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique alors $h(\pi(w)) = \pi(g(w))$ si $w \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$.

Etant donné trois points distincts a, b, c de \mathbf{CP}_1 il existe une et une seule homographie h qui envoie a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 . C'est l'homographie $h_{a,b,c}(z) = \frac{z-b}{z-a} \frac{c-a}{c-b}$. On appelle *birapport du quadruplet* (a, b, c, d) de points distincts de \mathbf{CP}_1 le nombre $h_{a,b,c}(d) = \frac{d-b}{d-a} \frac{c-a}{c-b}$. Il résulte de l'existence et unicité de l'homographie $h_{a,b,c}$ que deux quadruplets de points sont échangés par une homographie si et seulement si ils ont même birapport.

Enfin considérons une homographie $h = \frac{az+b}{cz+d}$, un cercle C et une droite δ de \mathbf{C} . Alors $h(C)$ est un cercle sauf si C contient le point $\frac{-d}{c}$ (c'est alors une droite qui évite $\frac{-d}{c}$), et $h(\delta)$ est un cercle qui passe par $\frac{-d}{c}$ sauf si δ contient le point $\frac{-d}{c}$ (c'est alors une droite qui passe par $\frac{-d}{c}$).

Définition 15 Si Ω est un ouvert de \mathbf{CP}_1 , une application $f : \Omega \rightarrow \mathbf{CP}_1$ est dite *analytique* si pour $z_0 \in \Omega$ on a :

- $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ et f analytique au voisinage de z_0 ,
- $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$ et $1/f$ analytique au voisinage de z_0 ,
- $z_0 = \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ et $f(1/z)$ analytique au voisinage de 0 ,
- $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$ et $1/f(1/z)$ analytique au voisinage de 0 ,

Remarque 19 Une application analytique à valeurs dans \mathbf{CP}_1 est donc continue.

Puisque $\frac{1}{z}$ est un homéomorphisme de \mathbf{CP}_1 , le théorème de l'application ouverte admet le corollaire suivant.

Proposition 30 Si Ω est un ouvert connexe de \mathbf{CP}_1 et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{CP}_1$ une application analytique non constante alors f est ouverte.

Application Une fraction rationnelle est une application analytique de \mathbf{CP}_1 dans elle-même. Si elle n'est pas constante elle est ouverte. Elle est propre car \mathbf{CP}_1 est compact. Or \mathbf{CP}_1 est connexe. Elle est donc surjective.

Définition 16 L'ensemble $\mathbf{C}\{z\}$ est un anneau intègre. Son corps des fractions noté $\mathbf{C}\{z\}[\frac{1}{z}]$ s'appelle *le corps des germes de fonctions méromorphes*. La fraction $\frac{1}{z}$ est l'inverse de z . C'est un corps différentiel : la dérivée de $\frac{A}{B}$ est $\frac{A'B - AB'}{B^2}$.

Propriétés Cette notation est justifiée par l'observation suivante. Soit $A, B \in \mathbf{C}\{z\}$ non nuls et $N = \omega(B) - \omega(A)$. Si $N \leq 0$ alors il existe $C \in \mathbf{C}\{z\}$ unique tel que $A = BC$. De plus $\omega(C) = -N$. La fraction $\frac{A}{B}$ est égale à C . Si $N > 0$ alors il existe $C = \sum_{n \geq 0} c_n z^n \in \mathbf{C}\{z\}$ unique tel que $z^N A = BC$. De plus $c_0 \neq 0$. La fraction $\frac{A}{B}$ est égale à la fraction $\frac{C}{z^N}$. Elle s'écrit de façon unique $\frac{A}{B} = P(\frac{1}{z}) + D(z)$ où $P(\frac{1}{z}) \in \mathbf{C}[\frac{1}{z}]$ et $D \in \mathbf{C}\{z\} : P(\frac{1}{z}) = c_0 \frac{1}{z^N} + \dots + c_{N-1} \frac{1}{z}$ et $D = \sum_{n \geq 0} c_{N+n} z^n$.

Définition 17 Le nombre $-N = \omega(A) - \omega(B)$ s'appelle l'ordre de $\frac{A}{B}$ et il est noté $\omega(\frac{A}{B})$. Son opposé s'appelle la *multiplicité* du pôle. Le pôle est *simple* s'il est de multiplicité 1. La fraction $P(\frac{1}{z}) = c_0 \frac{1}{z^N} + \dots + c_{N-1} \frac{1}{z}$ s'appelle la *partie polaire* de $\frac{A}{B}$. Le coefficient c_{N-1} est le *résidu* de $\frac{A}{B}$ et il est noté $\text{Res}(\frac{A}{B})$. La partie polaire est nulle si et seulement si $\omega(\frac{A}{B}) \geq 0$. Si $\omega(\frac{A}{B}) > 0$ alors ce nombre s'appelle la *multiplicité* du zéro.

Remarques 20 L'ordre d'un germe de fonction méromorphe est un morphisme surjectif entre le groupe multiplicatif $\mathbf{C}\{z\}[\frac{1}{z}] \setminus \{0\}$ et \mathbf{Z} . Les applications partie polaire et résidu sont linéaires.

Propriétés A chaque germe de fonction méromorphe $F = \frac{A}{B} = P(\frac{1}{z}) + D(z) \in \mathbf{C}\{z\}[\frac{1}{z}]$ est associée une fonction analytique \mathbf{F} appelée *somme de F* et définie sur le disque de convergence D_r de D sauf en 0 : $\mathbf{F}(z) = P(\frac{1}{z}) + \mathbf{D}(z)$ où \mathbf{D} est la somme de D . La dérivée F' a pour somme la dérivée de \mathbf{F} . Si l'ordre $\omega(F)$ est positif ou nul alors $F \in \mathbf{C}\{z\}$ et \mathbf{F} est analytique en 0 . Si l'ordre $\omega(F)$ est négatif alors $\lim_{|z| \rightarrow 0} |\mathbf{F}(z)| = +\infty$ et $\frac{1}{\mathbf{F}}$ se prolonge analytiquement en 0 . Ainsi \mathbf{F} se prolonge en une application analytique de D_r dans la sphère \mathbf{CP}_1 . Inversement à toute application analytique $f : U \rightarrow \mathbf{CP}_1$ définie sur un voisinage de 0 est associée un germe fonction méromorphe $F = \frac{A}{B} \in \mathbf{C}\{z\}[\frac{1}{z}]$.

Définition 18 Une fonction *méromorphe* sur un ouvert Ω de \mathbf{CP}_1 est une fonction analytique f qui vérifie les propriétés suivantes. Elle est définie sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ où \mathcal{P} est sous-ensemble fermé et discret de Ω . Si $z_0 \in \mathcal{P}$ alors :

- $z_0 \neq \infty$ et $z \mapsto f(z_0 + z)$ coïncide avec la somme d'un germe de fonction méromorphe $F_{z_0} = \frac{A}{B} \in \mathbf{C}\{z\}[\frac{1}{z}]$

- $z_0 = \infty$ et $z \mapsto f(1/z)$ coïncide avec la somme d'un germe de fonction méromorphe $F_{z_0} = \frac{A}{B} \in \mathbf{C}\{z\}[\frac{1}{z}]$.

L'ensemble \mathcal{P} s'appelle *diviseur* de f . Les points de \mathcal{P} sont les pôles de f . Si $z_0 \in \mathcal{P}$ l'ordre (resp. la partie polaire, le résidu) de f en z_0 est l'ordre (resp. la partie polaire, le résidu) de F_{z_0} . L'ordre est noté $\omega_{z_0}(f)$ et le résidu $\text{Res}_{z_0}(f)$. La multiplicité du pôle z_0 est la multiplicité du pôle de F_{z_0} . C'est l'opposé de l'ordre. Le pôle z_0 est *simple* s'il est de multiplicité 1. Si $\omega_{z_0}(f) = 0$ alors f ne s'anule pas en z_0 . Si $\omega_{z_0}(f) > 0$ alors f s'anule en z_0 , et on dit que z_0 est un *zéro de f de multiplicité* $\omega_{z_0}(f)$. Si z_0 n'est pas un pôle ou un zéro de f alors $\text{Res}_{z_0}(f) = 0$ et $\omega_{z_0}(f) = 0$.

Notation 7 On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace des fonctions méromorphes de Ω .

Exemple 14 Les fonctions rationnelles sont méromorphes.

Remarques 21 Supposons Ω connexe. On vérifie alors facilement que $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps différentiel. Si $\Omega \subset \mathbf{C}$ c'est même le corps des fractions de $O(\Omega)$ (théorème non démontré dans le cours). Il résulte de ce qui précède qu'il y a une correspondance entre $\mathcal{M}(\Omega)$ et l'ensemble des applications analytiques de Ω dans \mathbf{CP}_1 autres que la constante ∞ .

Remarques 22 Si $z_0 \neq \infty$ et $P = 0$ alors f se prolonge en z_0 en une fonction analytique. Les applications qui à $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ associe sa partie polaire ou son résidu en z_0 sont linéaires.

Proposition 31 Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} , $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et soit $U \subset \Omega$ un ouvert relativement compact de Ω . Il existe une fonction rationnelle R et une fonction analytique $g \in O(U)$ telle que la restriction à U de f coïncide avec $R + g$. Plus précisément l'ensemble \mathcal{P} des pôles de la

restriction de f à U est fini et

$$R(z) = \sum_{z_i \in \mathcal{P}} P_i \left(\frac{1}{z - z_i} \right)$$

où $P_i \left(\frac{1}{z - z_i} \right)$ est la partie polaire de f en $z_i \in \mathcal{P}$.

Preuve La finitude de \mathcal{P} résulte de la relative compacité de U . Le reste est immédiat.

•

Corollaire Si $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle elle admet une décomposition en éléments simples. Si elle n'a pas de pôle c'est un polynôme.

Preuve Le diviseur de f est $\mathcal{P} = Q^{-1}(0)$. On écrit $f = R + g$ avec

$$R(z) = \sum_{z_i \in \mathcal{P}} P_i \left(\frac{1}{z - z_i} \right)$$

et g une fonction entière. Soit n le degré de P . On a $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)/z^{n+1}| = 0$ et $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |R(z)| = 0$. Par conséquent $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |g(z)/z^{n+1}| = 0$. D'après Liouville, g est un polynôme de degré au plus n .

•

Corollaire Si $f : \mathbf{CP}_1 \rightarrow \mathbf{CP}_1$ est une application analytique alors c'est une fraction rationnelle.

Preuve Soit $\mathcal{P} = f^{-1}(\infty) \cap \mathbf{C}$. C'est un ensemble fini. Soit $R(z) = \sum_{z_i \in \mathcal{P}} P_i \left(\frac{1}{z - z_i} \right)$. Alors $f - R = g$ est une application analytique de la sphère dans elle-même qui est telle que $g^{-1}(\infty) \cap \mathbf{C}$ est vide. Si $g(\infty) \neq \infty$ alors g est bornée donc constante. Sinon $d = -\omega_\infty(g) > 0$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z^{d+1}} = 0$. Par conséquent g est un polynôme de degré au plus d (Liouville) et f est une fraction rationnelle.

•

Proposition 32 Si $h : \mathbf{CP}_1 \rightarrow \mathbf{CP}_1$ est une bijection analytique alors h est une homographie.

Preuve Si $h(\infty) \in \mathbf{C}$ on pose $H = \frac{1}{h - h(\infty)}$. Sinon on pose $H = h$. Il suffit de montrer que H est affine. Puisque $H(\infty) = \infty$ on a $H(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. Finalement la restriction de H à \mathbf{C} est une fraction rationnelle sans pôle et injective. L'absence de pôle assure que c'est un polynôme. L'injectivité permet de conclure que H est affine.

•

Définition 19 Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ non nulle. La *dérivée logarithmique* de f est la fonction méromorphe $\frac{f'}{f}$.

Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Si $f = g/h$ en restriction à un ouvert U alors $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} - \frac{h'}{h}$. Ainsi les pôles de la dérivée logarithmique de f sont les zéros et les pôles de f . Puisque la dérivée d'une série formelle $A = \sum_{n \geq d} a_n z^n = a_d z^d (1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} z^n)$ d'ordre d est la série $A' = da_d z^{d-1} (1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(n+d)a_{n+d}}{da_d} z^n)$, il vient $dA = zA'(1 + zB)$. Ce calcul appliqué aux séries entières associées à g et h en un zéro ou en un pôle z_0 de f montre que z_0 est un pôle simple de la dérivée logarithmique et que le résidu de la dérivée logarithmique en z_0 est égal à l'ordre de f . S'il est positif z_0 est un zéro de f et le résidu est égal à sa multiplicité. S'il est négatif z_0 est un pôle de f et le résidu est égal à l'opposé de sa multiplicité. Ceci se résume en :

Proposition 33 Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $z \in \Omega$ alors $\text{Res}_z \frac{f'}{f} = \omega_z(f)$.

On déduit obtient de ce calcul et du corollaire précédent :

Proposition 34 Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} , $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et soit $U \subset \Omega$ un ouvert relativement compact de Ω . On pose $\mathcal{P} = f^{-1}(\infty)$ et $\mathcal{Z} = f^{-1}(0)$. Il existe une fonction analytique $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que

$$\frac{f'}{f} = g + \sum_{z_i \in (\mathcal{P} \cup \mathcal{Z}) \cap U} \frac{\omega_{z_i}(f)}{z - z_i} \quad \text{si } z \in U.$$

VII Exponentielle et logarithme

Notation 8 Si $z_0 \in \mathbf{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$ on note $C_r^R(z_0)$ la couronne $\{r < |z - z_0| < R\}$. On pose $C_r^R(0) = C_r^R$.

Proposition 35 Soit $\mu \in \mathbf{C}$. Les fonctions analytiques sur \mathbf{C} qui vérifient l'équation différentielle $f' = \mu f$ (*) sont les fonctions de la forme $\lambda \exp(\mu z)$ où $\lambda \in \mathbf{C}$.

Preuve Les fonctions $\lambda \exp(\mu z)$ sont bien solutions de (*). Réciproquement, en dérivant l'équation différentielle (*) on constate que les solutions de (*) vérifient $f^{(n)} = \mu^n f$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En évaluant à l'origine et en utilisant la formule de Taylor on trouve que si f est solution de (*) alors sa série de Taylor est de la forme $\lambda \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n z^n}{n!}$. La fonction f est donc bien du type $\lambda \exp(\mu z)$.

•

Proposition 36 Les fonctions analytiques sur \mathbf{C} qui vérifient l'équation fonctionnelle $f(z' + z) = f(z')f(z)$ (**) sont les fonctions de la forme $\exp(\mu z)$ où $\mu \in \mathbf{C}$ et la fonction nulle.

Preuve En appliquant la formule de Taylor à $g = \exp(\mu z)$ en z' on constate que $g(z' + z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n g(z') z^n}{n!} = g(z') \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n g(z) z^n}{n!} = g(z')g(z)$. Par conséquent les fonctions $\exp(\mu z)$ sont bien solutions de (**).

Réciproquement considérons une fonction analytique f solution de (**). Alors en évaluant f à l'origine et en écrivant $0 = 0 + 0$ on obtient $f(0) = f(0)^2$ et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$ alors $f(z) = f(0 + z) = 0f(z) = 0$ donc f est nulle. Supposons donc que $f(0) = 1$. Soit $z' \in \mathbf{C}$. Dérivons (au sens complexe) à l'origine l'application $z \mapsto f(z' + z) = f(z')f(z)$. On obtient que $f'(z') = f(z')f'(0)$. Par conséquent f est une solution de (*) avec $\mu = f'(0)$.

•

Remarques 23

- Pour montrer l'identité $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$ on peut écrire

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(z + z')^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k+l=n} \frac{z^k z'^l}{k!l!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \frac{z^k z'^l}{k!l!} = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l \geq 0} \frac{z'^l}{l!} \right).$$

Ceci est permis car $\left(\frac{r^n}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable.

- Si $z \in \mathbf{C}$, $\exp z \exp(-z) = 1$. En particulier $\exp(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^*$.

- Les preuves des propositions sont locales : les solutions de (*) où de (**) dans $\mathcal{O}(D_r)$ sont du même type que les solutions entières.

La proposition précédente est équivalente à :

Théorème 16 Si $\phi : (\mathbf{C}, +) \rightarrow (\mathbf{C}^*, \cdot)$ est un morphisme analytique alors ϕ est du type $\exp(\mu z)$.

Proposition 37 L'application $\exp : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est un homéomorphisme et $|\exp(x + iy)| = \exp x$ si $z = x + iy \in \mathbf{C}$.

Preuve Si $x' > x \geq 0$ alors $\exp x' = \sum_{n \geq 0} \frac{x'^n}{n!} > \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \exp x \geq x$. Ainsi $\exp(-x) = 1/\exp x > 1/\exp x' = \exp(-x') \leq 1/x'$. Donc $\exp(\mathbf{R}) \subset]0, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ et \exp en restriction à \mathbf{R} est strictement croissante et continue. C'est donc un homéomorphisme de \mathbf{R} sur $]0, +\infty[$.

Si $z = x + iy$ alors $\overline{\exp}(x + iy) = \exp(x - iy)$ donc

$$|\exp(x + iy)|^2 = \exp(x + iy) \exp(x - iy) \exp(2x) = (\exp x)^2.$$

•

Proposition 38 L'exponentielle est surjective de \mathbf{C} dans \mathbf{C}^* . De plus si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x + i\mathbf{R}) = S_{\exp x}$ et si $y \in \mathbf{R}$ alors \exp réalise un homéomorphisme entre $\mathbf{R} + iy$ et la demi-droite réelle $]0, +\infty[\exp(iy)$.

Preuve Puisque $\exp : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est un homéomorphisme et que $|\exp(x + iy)| = \exp x$ on a $\exp^{-1}(S_{\exp x}) = x + i\mathbf{R}$ si $x \in \mathbf{R}$. De plus puisque $\exp(x + iy) = \exp x \exp(iy)$, l'exponentielle réalise bien un homéomorphisme entre $\mathbf{R} + iy$ et la demi-droite réelle $]0, +\infty[\exp(iy)$.

Pour montrer que $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ il suffit donc de montrer que $S_1 = \exp(i\mathbf{R})$. Or, S_1 est connexe et \exp est ouverte. Il suffit donc de montrer que $\exp(i\mathbf{R})$ est fermé dans S_1 .

Puisque \exp est ouverte il existe $\underline{1} > \varepsilon > 0$ tel que le disque $D_\varepsilon(1)$ de centre $1 = \exp 0$ et de rayon ε est dans $\exp(\mathbf{C})$. Soit $u \in \overline{\exp(i\mathbf{R})}$. Montrons que $u \in \exp(i\mathbf{R})$. Il suffit de montrer que $u \in \exp(\mathbf{C})$ car $\exp^{-1}(S_{\exp x}) = x + i\mathbf{R}$. Puisque $u \in \overline{\exp(i\mathbf{R})}$ il existe $v \in i\mathbf{R}$ tel que $|u - \exp(iv)| < \varepsilon$. Ainsi $u/\exp(iv) \in D_\varepsilon(1)$. Il existe donc $w \in \mathbf{C}$ tel que $\exp(w) = u/\exp(iv)$. Par conséquent $u = \exp(iv + w)$ et u a donc un antécédent.

•

Proposition 39 L'exponentielle est périodique. Plus précisément, il existe π réel strictement positif tel que si $u \in \mathbf{C}^*$ il existe $v \in \mathbf{C}$ tel que $\exp^{-1}(u) = v + 2i\pi\mathbf{Z}$.

Preuve La restriction $\exp : i\mathbf{R} \rightarrow S_1 = \exp(i\mathbf{R})$ est ouverte puisque \exp est ouverte. De plus $\exp(i\mathbf{R}) = S_1$. Si cette restriction était injective ce serait donc un homéomorphisme. Ce n'est pas possible car le cercle S_1 est compact et la droite $i\mathbf{R}$ ne l'est pas. Par conséquent il existe $u \in S_1$ qui possède au moins deux antécédents. Soit w l'un d'eux. Il résulte de la propriété de morphisme de l'exponentielle que $\exp^{-1}(u) = w + \exp^{-1}(1)$. Par conséquent $u = 1$ a aussi plusieurs antécédents et il suffit donc d'étudier le groupe additif $\exp^{-1}(1)$ (c'est à dire le noyau de \exp). Puisque \exp est localement inversible, $\exp^{-1}(1)$ est un fermé de \mathbf{C} (inclus dans $i\mathbf{R}$) et sans point d'accumulation. Ainsi $\exp^{-1}(1) \setminus \{0\}$ est un fermé non vide. Il existe v dans $\exp^{-1}(1) \setminus \{0\}$ qui minimise la distance à l'origine. Soit $v' \in \exp^{-1}(1)$. Soit $n \in \mathbf{Z}$ tel que nv minimise la distance de v' à $v\mathbf{Z}$. Puisque $0, v$ et v' sont alignés on a $|v' - nv| < |v|$. Or $v' - nv$ est un antécédent de 1. Par conséquent $v' = nv$. Ainsi $\exp^{-1}(1) = v\mathbf{Z}$. Le nombre π recherché est $v/2i$ ou son opposé.

•

Remarque 24 L'ensemble $2i\pi\mathbf{Z}$ est le noyau du morphisme \exp .

Corollaire Soit $b \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{N}$. L'équation $z^n - b = 0$ a exactement n racines. De plus si $\exp(u) = b$ alors les racines de l'équation sont les nombres $\exp((u + 2ik\pi)/n)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Preuve Puisque $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ si $n = 0$ l'équation n'a pas de racine et si $n > 0$ alors il existe u tel que $\exp(u) = b$. Supposons $n > 0$. La description de toutes les racines de l'équation découle du fait que $z \in \mathbf{C} \mapsto \exp(nz) \in \mathbf{C}^*$ est un morphisme surjectif dont le noyau est $\frac{2i\pi}{n}\mathbf{Z}$.

•

Proposition 40 $\exp\frac{i\pi}{2} = i$.

Preuve Puisque $(\exp(i\pi))^2 = 1$ et $\exp(i\pi) \neq 1$ on a $\exp(i\pi) = -1$. Ceci implique que $(\exp\frac{i\pi}{2})^2 = -1$ et donc que $\exp\frac{i\pi}{2} \in \{i, -i\}$. D'autre part, l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(it) \in S_1$ est une paramétrisation du cercle unité par l'abscisse curviligne car $\frac{d}{dt}\exp(it) = i\exp(it)$ est de norme 1. L'axe réel \mathbf{R} sépare le cercle S_1 en deux composantes connexes incluses dans $\{Im z > 0\}$ et $\{Im z < 0\}$. L'une d'elle est paramétrée bijectivement via $\exp(it)$ par l'intervalle $]0, \pi[$, l'autre par $] -\pi, 0[$. Puisque la dérivée de $t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(it)$ en $t = 0$ vaut 1, on en déduit que $\exp(i]0, \pi[) \subset \{Im z > 0\}$. En particulier $\Re(\exp\frac{i\pi}{2}) > 0$ et donc $\exp\frac{i\pi}{2} = i$.

•

Définition 20 Si $z \in \mathbf{C}^*$, on appelle *argument* de z tout réel θ tel que $\exp(i\theta) = z/|z|$.

Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Puisque $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$, le point z admet au moins argument θ et puisque $2i\pi\mathbf{Z}$ est le noyau de \exp , l'ensemble des arguments de z est $\theta + 2\pi\mathbf{Z}$. Le point z admet un et un seul argument dans chaque intervalle $[t, t + 2\pi[$.

Définition 21 Si $z \in \mathbf{C}$ on pose

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

On peut vérifier que :

Proposition 41 Les fonctions \cos et \sin sont entières, 2π périodiques et vérifient

- 1) $\cos z + i \sin z = \exp(iz)$
- 2) $\cos z = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, $\sin z = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- 3) $\cos z = \cos(-z)$, $\sin z = \sin(-z)$
- 4) $\cos^2 + \sin^2 = 1$
- 5) $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$
- 6) $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$, $\sin(z + \pi/2) = \cos z$
- 7) $\cos(\mathbf{R}) = \sin(\mathbf{R}) = [-1, 1]$
- 8) $\cos(\mathbf{C}) = \sin(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$
- 9) $\cos^{-1}(\cos z) = (z + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (-z + 2\pi\mathbf{Z})$,
 $\sin^{-1}(\sin z) = (z + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - z + 2\pi\mathbf{Z})$

Définition 22 La fonction *tangente* est la fonction analytique définie par $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Elle est définie et π -périodique sur $\mathbf{C} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$. Elle s'annule sur $\pi\mathbf{Z}$. Son inverse $\frac{\cos z}{\sin z}$ est la *cotangente* et elle est définie sur $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$.

Remarque 25 Les restrictions à \mathbf{R} des fonctions trigonométriques précédentes correspondent aux fonctions trigonométriques usuelles.

Définition 23 Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} . Une *détermination du logarithme* sur Ω est une fonction analytique $l \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\exp(l(z)) = z$ si $z \in \Omega$.

Remarque 26 Si $0 \in \Omega$ alors il n'existe pas de détermination du logarithme sur Ω .

Proposition 42 Si l est une détermination du logarithme sur un ouvert connexe Ω les déterminations du logarithme sur cet ouvert sont les applications $l + 2i\pi n, n \in \mathbf{N}$.

Preuve Les applications $l + 2i\pi n, n \in \mathbf{N}$ sont clairement des déterminations du logarithme. Réciproquement, soit L une détermination du logarithme. Si $z \in \Omega$ alors $\exp(L(z)) = \exp(l(z)) = z$. Donc il existe $n(z) \in \mathbf{Z}$ tel que $L(z) - l(z) = n(z)$. La fonction $z \mapsto n(z)$ est continue sur un ouvert connexe et à valeurs entières. Elle est donc constante.

•

Corollaire Si l et L sont deux déterminations du logarithme sur un ouvert connexe Ω alors pour tous $z, z' \in \Omega$ on a $l(z') - l(z) = L(z') - L(z)$.

Proposition 43 Soit U un ouvert connexe et non vide de \mathbf{C} . Si la restriction de \exp à U est injective alors il existe une détermination du logarithme sur $\Omega = \exp(U)$.

Preuve Si $\exp : U \rightarrow \Omega$ est injective alors elle est bijective et sa réciproque est analytique. Cette dernière est une détermination du logarithme.

•

Notations 9 Si $t \in \mathbf{R}$ on pose $\delta_t = [0, +\infty[\exp(it)$ et $\Omega_t = \mathbf{C} \setminus \delta_t$. On note $\Omega^+ = \{Im z > 0\}$ et $\Omega^- = \{Im z < 0\}$. On pose enfin $B_t = \{x + iy : y \in]t, t + 2\pi[$.

Remarque 27 Puisque $\exp : B_t \rightarrow \Omega_t$ est bijective, il existe des déterminations du logarithme sur l'ouvert Ω_t .

En revanche :

Proposition 44 Soit $r < R \in [0, +\infty[$. Il n'existe pas de détermination du logarithme sur $C_r^R = \{r < |z| < R\}$.

Preuve On raisonne par l'absurde. Supposons que l soit une détermination du logarithme sur C_r^R . Sa restriction à $C_r^R \setminus]r, R[$ est une détermination du logarithme sur ce domaine. Soit $s \in]r, R[$. Considérons $f :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(t) = l(s \exp(it))$. Alors $f(t) = f(\pi) + it - i\pi$ si $t \in]0, 2\pi[$. Par conséquent $l(s) = \lim_0 f(t) = f(\pi) - i\pi$ mais aussi $l(s) = l(s \exp(2i\pi)) = \lim_{2\pi} f(t) = f(\pi) + i\pi$. C'est la contradiction recherchée.

•

Définition 24 La détermination du logarithme sur $\Omega_\pi = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ qui vaut 0 pour $z = 1$ s'appelle la *détermination principale* du logarithme et elle est notée \log .

Remarques 28 Si $x \in]0, +\infty[$, $\log x$ coïncide avec le logarithme usuel. Si l est une détermination du logarithme définie au voisinage d'un point $z \in \mathbf{C}^*$ alors il existe un argument $\theta(z)$ de z tel $l(z) = \log |z| + i\theta(z)$.

Proposition 45 Soit Ω ouvert connexe et $l \in O(\Omega)$. Si l est une détermination du logarithme alors $l' = 1/z$. Réciproquement, si $l' = 1/z$ alors il existe $c \in \mathbf{C}$ tel que $l + c$ soit une détermination du logarithme.

Preuve Si l est une détermination du logarithme alors $l'(z) = 1/\exp'(l(z)) = 1/\exp(l(z)) = 1/z$. Réciproquement considérons $l \in O(\Omega)$ telle que $l' = 1/z$. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $u_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\exp(u_0) = z_0$. On pose $c = u_0 - l(z_0)$, $L = l + c$ et $g = z \exp(-L)$. Alors $g' = 0$ car $L' = 1/z$. Puisque Ω est connexe ceci implique que g est constant. Or $g(z_0) = z_0 \exp(-u_0) = z_0/z_0 = 1$. Par conséquent g vaut 1, $\exp(L(z)) = z$ et donc L est une détermination du logarithme.

•

Exemple 15 La somme \mathbf{L} de la série logarithme $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ vérifie $\mathbf{L}(0) = 0$ et $\mathbf{L}'(z) = 1/(1+z)$. Par conséquent $\mathbf{L}(z-1)$ est la détermination principale du logarithme sur le disque de centre 1 et de rayon 1 (rayon de convergence de la série logarithme).

Une conséquence immédiate de la propriété de morphisme de l'exponentielle est un analogue partiel pour les déterminations du logarithme.

Proposition 46 Soit $l_1 \in O(\Omega_1)$ et $l_2 \in O(\Omega_2)$ des déterminations du logarithme sur des ouverts. Si $z_1 \in O(\Omega_1)$, l'application $l : z_1 \Omega_2 \rightarrow \mathbf{C}$ qui à z associe $l_1(z_1) + l_2(z/z_1)$ est une détermination du logarithme.

On déduit de cette proposition et du développement de la détermination principale du logarithme en 1 le résultat suivant.

Proposition 47 Soit $z_0 \neq 0$ et soit $l_0 \in \exp^{-1}(z_0)$. La détermination du logarithme l , définie sur le disque $D_{|z_0|}(z_0)$ et qui vaut l_0 en z_0 admet le développement en série entière suivant : si $|z| < |z_0|$ alors $l(z_0 + z) = l_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{z_0^n}$.

Définitions 25 Si $n \in \mathbf{N}^*$ on appelle détermination de la racine n -ème de z sur Ω une fonction analytique $\sqrt[n]{z} \in O(\Omega)$ telle que $\sqrt[n]{z}^n = z$ (on note $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z}$). Si $\alpha \in \mathbf{C}$ et $l : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est une détermination du logarithme alors on appelle détermination de la puissance z^α associée à l la fonction p_α définie par $p_\alpha(z) = \exp(\alpha l(z))$ si $z \in \Omega$.

On obtient facilement :

Proposition 48 $p'_\alpha = \alpha p_{\alpha-1}$ (si $\alpha \neq 0$), $p_{\alpha+\beta} = p_\alpha p_\beta$, $z = (p_{\frac{1}{n}})^n$ et $p_n(z) = z^n$ si $n \in \mathbf{N}$.

Exemple 16 La racine carrée admet une détermination sur tout domaine sur lequel il existe une détermination du logarithme.

Proposition 49 Soit Ω un domaine connexe sur lequel la racine carrée possède une détermination notée $\sqrt{\cdot}$. Alors la racine carrée possède exactement deux déterminations sur Ω , $\sqrt{\cdot}$ et $-\sqrt{\cdot}$. Elles sont injectives, $\sqrt{\Omega} \cap -\sqrt{\Omega} = \emptyset$ et $0 \notin \Omega$.

Preuve Il est clair que si $\sqrt{\cdot}$ est une détermination de la racine carrée alors $-\sqrt{\cdot}$ en est une seconde. Puisque $\sqrt{\cdot}$ a une réciproque à gauche elle est injective et $\sqrt{\Omega}$ n'est pas un voisinage de l'origine (z^2 n'est pas injective au voisinage de l'origine). Par conséquent $0 \notin \sqrt{\Omega}$ et donc $0 \notin \Omega$. S'il existe $z, z' \in \Omega$ tels que $\sqrt{z} = -\sqrt{z'}$ alors en élevant au carré on obtient $z = z'$ et

donc $\sqrt{z} = z = 0$, ce qui est contradictoire avec ce qui précède. Si g est une détermination de la racine carrée, elle est égale à $\sqrt{}$ sur un fermé F de Ω , elle est égale à $-\sqrt{}$ sur un fermé F' de Ω , $F \cap F'$ est vide alors que $F \cup F' = \Omega$. Puisque Ω est connexe, l'un des fermés est vide. Il n'y a pas trois déterminations de la racine carrée sur Ω .

•

Proposition 50 Soit $r < R \in [0, +\infty]$. Il n'existe pas de détermination de la racine carrée sur la couronne C_r^R .

Preuve On raisonne par l'absurde. Supposons que g soit une détermination de la racine carrée sur C_r^R . Quitte à prendre son opposé on peut supposer que $g(\frac{r+R}{2}) > 0$. Sa restriction à $C_r^R \setminus]-R, -r[$ coïncide avec $z \mapsto \exp(\frac{1}{2} \log z)$ où \log est la détermination principale du logarithme. Considérons $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(t) = g(\frac{r+R}{2} \exp(it))$. Alors $f(t) = g(\frac{r+R}{2}) \exp(\frac{it}{2})$. Ainsi $g(-\frac{r+R}{2}) = \lim_{\pi} f(t) = ig(\frac{r+R}{2})$ mais aussi $g(-\frac{r+R}{2}) = \lim_{-\pi} f(t) = -ig(\frac{r+R}{2})$ C'est la contradiction recherchée.

•

Définition 26 Le *cosinus hyperbolique*, le *sinus hyperbolique*, la *tangente hyperbolique*, et la *cotangente hyperbolique* sont définis par :

$$\cosh z = \cos iz, \sinh z = \frac{\sin iz}{i}, \tanh z = \frac{\sinh}{\cosh}, \coth z = \frac{\cosh}{\sinh}.$$

VIII Une formule intégrale fondamentale

Soit $R > 0$ et g une fonction continue de S_R dans \mathbf{C} . Si $z \in \mathbf{C} \setminus S_R$ et $k \in \mathbf{N}$ on pose

$$g_k(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(R \exp(it))}{(R \exp(it) - z)^{k+1}} iR \exp(it) dt.$$

Si $n \in \mathbf{N}$ on pose

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(R \exp(it))}{(R \exp(it))^{n+1}} iR \exp(it) dt,$$

$$b_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} g(R \exp(it)) (R \exp(it))^{n-1} iR \exp(it) dt.$$

Exemples 17 Soit $m \in \mathbf{N}$. Si $g(z) = z^m$ alors les $b_n, n \geq 1$ sont tous nuls et les a_n sont tous nuls sauf a_m qui vaut 1. Plus généralement si \mathbf{A} est la somme d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon strictement supérieur à R alors on a l'identité

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{A}(R \exp(it))}{(R \exp(it))^{n+1}} iR \exp(it) dt.$$

Si $g(z) = z^{-m}$ et $m \neq 0$ alors les a_n sont tous nuls et les b_n sont tous nuls sauf b_m qui vaut -1 .

On estime $|a_n|$ on fonction de $\sup_{\zeta \in S_R} |g(\zeta)|$.

Proposition 51 (estimations de Cauchy) Si $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq \frac{\sup_{\zeta \in S_R} |g(\zeta)|}{R^n}$.

Preuve $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|g(R \exp(it))|}{R^{n+1}} R dt \leq \frac{\sup_{\zeta \in S_R} |g(\zeta)|}{R^n}$.

•

Proposition 52 *Le rayon de convergence de la série $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est au moins R et celui de la série $B = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ est au moins $1/R$. De plus si $|z| < R$ alors $g_0(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $g_0^{(k)}(z) = g_k(z)$ pour $k \in \mathbf{N}$. Si $|z| > R$ alors $g_0(z) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{1}{z^n}$. En particulier g_0 est analytique.*

Preuve Soit $z \in \mathbf{C} \setminus$ fixé tel que $|z| < R$ et soit $k \in \mathbf{N}$. On pose $\eta = \frac{|z|}{R}$. Si $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{1}{R \exp(it) - z} = \frac{k!}{(R \exp(it) - z)^{k+1}} = \frac{1}{(R \exp(it))^{k+1}} \frac{k!}{\left(1 - \frac{z}{R \exp(it)}\right)^{k+1}}$$

donc on obtient en développant le troisième terme

$$\frac{k!}{(R \exp(it) - z)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k) \frac{z^n}{(R \exp(it))^{n+k+1}}$$

et $\sum_{n \geq 0} |(n+1) \dots (n+k) \frac{z^n}{(R \exp(it))^{n+k+1}}| \leq \frac{1}{R^{k+1}} \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k) \eta^n$. De plus g est bornée car continue sur le compact S_R . Par conséquent à z fixé la suite de fonctions $f_{k,l}(z)(t) = \sum_{n=0}^l (n+1) \dots (n+k) \frac{g(R \exp(it))}{(R \exp(it))^{n+k+1}} i R \exp(it) z^n$ définies sur $[0, 2\pi]$ converge uniformément vers $k! \frac{g(R \exp(it))}{(R \exp(it) - z)^{k+1}} i R \exp(it)$. Prenons $k = 0$. Puisque $\int_0^{2\pi} f_{0,l}(z)(t) dt = \sum_{n=0}^l a_n z^n$, on obtient en faisant tendre l vers l'infini $g_0(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Ainsi le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est au moins R et si $k \in \mathbf{N}$ $g_0^{(k)}(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k) a_{n+k} z^n$. De plus $f_{k,l}(z)(t) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} f_{0,l+k}(z)(t)$. Ainsi $\int_0^{2\pi} f_{k,l}(z)(t) dt = \sum_{n=0}^l (n+1) \dots (n+k) a_{n+k} z^n$ et on obtient en faisant tendre l vers l'infini $g_k(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k) a_{n+k} z^n$. Ceci prouve $g_0^{(k)} = g_k$.
Soit $z \in \mathbf{C} \setminus$ fixé tel que $|z| > R$. On pose $\eta = \frac{R}{|z|}$. Si $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{1}{R \exp(it) - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{R \exp(it)}{z}} = -\sum_{n \geq 1} \frac{(R \exp(it))^{n-1}}{z^n}$$

et $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(R \exp(it))^{n-1}}{z^n} \right| \leq \frac{1}{|z|} \sum_{n \geq 0} \eta^n$. De plus g est bornée car continue sur le compact S_R . Par conséquent la suite de fonctions

$$h_k(t) = -\sum_{n=1}^k g(R \exp(it)) (R \exp(it))^{n-1} i R \exp(it) \frac{1}{z^n}$$

définies sur $[0, 2\pi]$ converge uniformément vers $\frac{g(R \exp(it))}{R \exp(it) - z} i R \exp(it)$. En intégrant sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ il vient que $g_0(z) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{1}{z^n}$. Ceci prouve aussi que le rayon de la série $\sum_{n \geq 1} b_n z^n$ est au moins $1/R$.

•

Proposition 53 (*estimations de Cauchy*) Si $z \in D_R$ et $k \in \mathbf{N}$,

$$|g^{(k)}(z)| \leq \sup_{\zeta \in S_R} |g(\zeta)| \frac{k! R}{(R - |z|)^{k+1}}.$$

Preuve $|g^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|g(R \exp(it))|}{(R - |z|)^{k+1}} R dt \leq \sup_{\zeta \in S_R} |g(\zeta)| \frac{k! R}{(R - |z|)^{k+1}}.$

On considère maintenant une suite de fonctions continues g_j définies sur S_R et qui convergent uniformément vers \tilde{g} . On note $g_{j,k}$ les fonctions définies par

$$g_{j,k}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_j(\operatorname{Rexp}(it))}{(\operatorname{Rexp}(it) - z)^{k+1}} i\operatorname{Rexp}(it) dt \text{ si } |z| \neq R$$

et on pose

$$\tilde{g}_k(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{g}(\operatorname{Rexp}(it))}{(\operatorname{Rexp}(it) - z)^{k+1}} i\operatorname{Rexp}(it) dt \text{ si } |z| \neq R.$$

Proposition 54 *A k fixé, $g_{j,k}$ est la dérivée kème de $g_{j,0}$, et la suite $g_{j,k}$ converge uniformément sur tout compact de D_R vers \tilde{g}_k qui est la dérivée kème de \tilde{g}_0 .*

Preuve Il suffit de remarquer que si $r \in]0, R[$ alors

$$\sup_{\substack{|z| \leq r \\ t \in [0, 2\pi]}} \left| \frac{\tilde{g}(\operatorname{Rexp}(it)) - g_j(\operatorname{Rexp}(it))}{(\operatorname{Rexp}(it) - z)^{k+1}} \right| \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} \frac{|\tilde{g}(\operatorname{Rexp}(it)) - g_j(\operatorname{Rexp}(it))|}{(R - r)^{k+1}}$$

et donc la suite $\sup_{|z| \leq r, t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\tilde{g}(\operatorname{Rexp}(it)) - g_j(\operatorname{Rexp}(it))}{(\operatorname{Rexp}(it) - z)^{k+1}} \right|$ tend vers 0.

•

On applique cette proposition à $\sum_{n=0}^j a_n z^n$ où $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série de rayon strictement supérieur à R . Si on note \mathbf{A} sa somme on obtient (en utilisant les calculs des exemples du début du chapitre) :

Corollaire (formule de Cauchy pour les séries entières) *Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de somme \mathbf{A} et de rayon strictement supérieur à R . Si $|z| < R$ alors*

$$\mathbf{A}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{A}(\operatorname{Rexp}(it))}{(\operatorname{Rexp}(it) - z)^{k+1}} i\operatorname{Rexp}(it) dt \text{ si } k \in \mathbf{N}.$$

De plus si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{A}(\operatorname{Rexp}(it))}{(\operatorname{Rexp}(it))^{n+1}} i\operatorname{Rexp}(it) dt.$$

IX Formes exactes et localement exactes, intégrales curvilignes, indices

Définition 27 Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} . Une 1-forme différentielle à valeurs complexes (en abrégé une forme) $\omega = adx + bdy$ sur Ω est une application continue ω de Ω dans l'espace $L(\mathbf{C}, \mathbf{R}^2)$ des applications \mathbf{R} -linéaires de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{C} . Si les coefficients a et b sont C^k on dit que ω est C^k ($k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$). On note $\Lambda^1(\Omega)$ le \mathbf{C} -espace vectoriel des formes définies sur Ω .

Exemples 18

- $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ avec $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ différentiable.
- Si f est holomorphe alors $\omega = fdz$.

Notation 10 Si $z \in \Omega$ on pose $|\omega(z)| = \sup_{|u|=1} |\omega(z) \cdot u|$. En particulier si $\omega(z) = g(z)dz$ (i.e $b = ia$) alors $|\omega(z)| = |g(z)|$.

Définitions 28 Soit ω une forme définie sur un ouvert Ω . Elle est dite *exacte* si c'est la différentielle d'une fonction f qui est appelée *primitive* de ω . Elle est dite *localement exacte* si tout $z_0 \in \Omega$ admet un voisinage sur lequel ω est exacte. Supposons $\omega \in C^1$. Elle est dite *fermée* si $\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0$.

Remarque 29 Les formes exactes (resp. localement exactes, fermées) forment un \mathbf{C} -espace vectoriel.

Exemples 19

- dx, dy, dz et $d\bar{z}$ sont des formes exactes.
- Soit A une série entière de rayon infini et \mathbf{A} sa somme. Alors $\omega = \mathbf{A}dz$ est exacte. Une primitive de ω est la somme de l'antidérivée $A^{(-1)}$
- Si $n > 1$ une primitive de $\frac{dz}{z^n}$ sur \mathbf{C}^* est $\frac{1}{(1-n)z^{n-1}}$.
- La forme $\omega = \frac{dz}{z}$ est localement exacte mais n'admet pas de primitive sur \mathbf{C}^* car il n'existe pas de détermination du logarithme sur \mathbf{C}^* .
- Soit $\omega_1 = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ et $\omega_2 = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. Alors $\omega_1 = d \log |z|$ est exacte et $\frac{dz}{z} = \omega_1 + i\omega_2$. Par conséquent la forme ω_2 est localement exacte mais elle n'est pas exacte sur \mathbf{C}^* .

Proposition 55 (lemme de Schwarz) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est C^2 alors df est fermée.

Il suffit d'utiliser $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Proposition 56 (lemme de Poincaré) Si $\omega = adx + bdy$ est C^1 et fermée alors elle est localement exacte.

Preuve Soit $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $z_0 +]-\varepsilon, \varepsilon[^2 \subset \Omega$. On pose $f(x, y) = \int_0^x a(u, 0)du + \int_0^y b(x, v)dv$. En dérivant sous le signe \int on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial b}{\partial x}(x, v)dv = a(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, v)dv = a(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b(x, y).$$

•

Définitions 29 On appelle *arc* une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$. On dit que γ est un arc de l'ouvert Ω si $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. Si l'application γ est injective on dit que γ est un *arc plongé*. On appelle *lacet* un arc γ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si l'application γ restreinte à $[a, b[$ est injective on dit que γ est une *courbe de Jordan*.

L'*opposé* $-\gamma$ d'un arc $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ est l'arc $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ défini par $-\gamma(t) = \gamma(b - (t - a))$.

La *somme* deux arcs $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ tels que $\alpha(b) = \beta(c)$ est l'arc $\alpha + \beta : [\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$ défini par : $\alpha + \beta(t) = \alpha(2(t - c/2))$ si $t \in [\frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}]$ et $\alpha + \beta(t) = \beta(2(t - b/2))$ si $t \in [\frac{b+c}{2}, \frac{b+d}{2}]$.

Notation 11 Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ est un arc et $a \leq c \leq d \leq b$ alors γ_c^d est la restriction de γ à $[c, d]$ et γ_c^d est l'opposé de γ_c^d .

Définition 30 Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un arc C^1 par morceaux et ω une 1-forme différentielle définie sur un voisinage de $\gamma([a, b])$. On appelle *intégrale de ω le long de γ* et on note $\int_\gamma \omega$ le nombre $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$.

Avec cette définition la formule de Cauchy pour les séries entières devient :

Corollaire (formule de Cauchy pour les séries entières) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de somme \mathbf{A} et de rayon strictement supérieur à R et $\gamma(t) = R \exp(it)$ si $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\mathbf{A}^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathbf{A}(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \text{ si } |z_0| < R \text{ et } k \in \mathbf{N}.$$

Remarques 30 L'application $\omega \rightarrow \int_\gamma \omega$ est une forme \mathbf{C} -linéaire.

Si $\omega = df$ alors $\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Soit $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ un homéomorphisme croissant, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un arc et ω une forme définie sur Ω . Si ϕ et γ sont C^1 par morceaux alors $\int_{\gamma \circ \phi} \omega = \int_\gamma \omega$. C'est la formule du changement de variables.

Proposition 57 $|\int_\gamma \omega| \leq \sup_\gamma \|\omega\| \cdot \text{longueur de } \gamma$.

Preuve On a $|\int_\gamma \omega| \leq \int_a^b |\omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \leq \int_a^b \|\omega(\gamma(t))\| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \sup_\gamma \|\omega\| \cdot \text{longueur de } \gamma$.

•

Proposition 58 On a $\int_{\alpha+\beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$ et $\int_{-\alpha} \omega = -\int_\alpha \omega$ quand ces termes sont définis.

Proposition 59 Si $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est C^1 sur Ω connexe et $df = 0$ alors f est constante.

Preuve Soit $z \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon(z) \subset \Omega$. Si $z' \in D_\varepsilon(z)$ et $t \in [0, 1]$ on pose $\gamma(t) = (1-t)z + tz'$. Alors $f(z') - f(z) = \int_\gamma df = 0$. La fonction f est localement constante sur Ω connexe. Elle est donc constante.

•

Corollaire Deux primitives d'une forme ω sur un ouvert connexe diffèrent d'une constante.

Corollaire Si f et g sont deux primitives d'une forme ω sur un ouvert connexe Ω alors pour tous $z, z' \in \Omega$ on a $f(z') - f(z) = g(z') - g(z)$.

Proposition 60 Soit $r > 0$ et $\gamma(t) = i r \exp(it)$ si $t \in [0, 2\pi]$. Alors $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$.

Preuve En effet soit $l_{-\frac{\pi}{2}}$ et $l_{\frac{\pi}{2}}$ des déterminations du logarithme sur $\Omega_{-\frac{\pi}{2}}$ et $\Omega_{\frac{\pi}{2}}$. Puisque $\gamma([0, \pi]) \subset \Omega_{-\frac{\pi}{2}}$ et $\gamma([\pi, 2\pi]) \subset \Omega_{\frac{\pi}{2}}$ il vient

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_0^\pi} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\pi^{2\pi}} \frac{dz}{z} = i\pi + i\pi = 2i\pi.$$

Rappel Un ouvert connexe de \mathbf{C} est connexe par arcs, par arcs C^1 par morceaux et par segments parallèles aux axes.

•

Proposition 61 Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}$, $\varepsilon > 0$ et $\omega = adx + bdy$ définie sur $\Omega = z_0 +]-\varepsilon, \varepsilon[^2$ ou sur $\Omega = D_\varepsilon(z_0)$. Alors ω est exacte si et seulement si

$$\int_{x_0}^x a(u, y_0) du + \int_{y_0}^y b(x, v) dv = \int_{x_0}^x a(u, y) du + \int_{y_0}^y b(x_0, v) dv$$

pour tout $z = x + iy \in \Omega$ et alors une primitive de ω est la fonction f définie par

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x a(u, y_0) du + \int_{y_0}^y b(x, v) dv = \int_{x_0}^x a(u, y) du + \int_{y_0}^y b(x_0, v) dv.$$

Preuve C'est une condition nécessaire. En effet, si F est une primitive de ω alors $F(x, y_0) - F(z_0) = \int_{x_0}^x a(u, y_0) du$, $F(x, y) - F(x, y_0) = \int_{y_0}^y b(x, v) dv$, $F(x_0, y) - F(z_0) = \int_{y_0}^y b(x_0, v) dv$ et $F(x, y) - F(x_0, y) = \int_{x_0}^x a(u, y) du$. Les sommes des deux premiers et des deux derniers termes sont toutes les deux égales à $F(x, y) - F(z_0)$.

C'est une condition suffisante. En effet si

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x a(u, y_0) du + \int_{y_0}^y a(x, v) dv = \int_{x_0}^x a(u, y) du + \int_{y_0}^y a(x_0, v) dv$$

alors en dérivant la seconde expression par rapport à x on obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ et en dérivant la première par rapport à y on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = b$.

•

Remarque 31 Cette condition nécessaire et suffisante est équivalente à dire que $\int_\gamma \omega = 0$ si γ est une paramétrisation affine par quatre morceaux du bord d'un rectangle à cotés parallèles aux axes, inclus dans Ω et dont l'un des sommets est z_0 .

Corollaire Une forme ω définie sur un ouvert Ω est localement exacte si $\int_\gamma \omega = 0$ dès que γ est une paramétrisation affine par quatre morceaux du bord d'un rectangle à cotés parallèles aux axes et inclus dans Ω .

Corollaire (lemme de Poincaré) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}$, $\varepsilon > 0$ et $\omega = adx + bdy$ définie sur $\Omega = z_0 +]-\varepsilon, \varepsilon[^2$ ou sur $\Omega = D_\varepsilon(z_0)$. Si ω est localement exacte alors elle est exacte et une primitive est définie par

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x a(u, y_0) du + \int_{y_0}^y b(x, v) dv.$$

Preuve On pose $f(x, y) = \int_{x_0}^x a(u, y_0) du + \int_{y_0}^y b(x, v) dv$. D'après ce qui précède. Si $(x, y) \in \Omega$ et (x', y') proche de (x, y) alors

$$f(x', y') - f(x, y) = \int_x^{x'} a(u, y) du + \int_y^{y'} b(x', v) dv = \int_x^{x'} a(u, y') du + \int_y^{y'} b(x, v) dv.$$

Et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b(x, y)$.

•

Proposition 62 Soit ω définie sur Ω ouvert connexe de \mathbf{C} . Alors ω est exacte si et seulement si $\int_\gamma \omega = 0$ sur tout lacet C^1 par morceaux inclus dans Ω . On obtient une primitive de la façon suivante. On fixe $z_0 \in \Omega$ et si $z \in \Omega$ on pose $f(z) = \int_\gamma \omega$ où γ est un arc C^1 par morceaux $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ tel que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z$.

Preuve Supposons ω exacte et soit f une primitive de ω . Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ est un lacet C^1 par morceaux alors

$$\int_{\gamma_a} \omega = f(\gamma(t)) - f(\gamma(a)) = f(\gamma(t)) - f(\gamma(b)) = - \int_{\gamma_b} \omega$$

et donc $\int_\gamma \omega = 0$. La condition annoncée est bien nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante. Soit $z_0 \in \Omega$ fixé. Soit z un point de Ω . Puisque Ω est connexe par arc C^1 par morceaux il existe un arc $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ C^1 par morceaux tel que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z$. On pose $f(z) = \int_\gamma \omega$. Le nombre $f(z)$ ne dépend pas de γ . En effet soit $\beta: [a, b] \rightarrow \Omega$ un arc C^1 par morceaux tel que $\beta(a) = z_0$ et $\beta(b) = z$. Alors $\gamma - \beta$ est un lacet donc $\int_\gamma \omega - \int_\beta \omega = \int_{\gamma - \beta} \omega = 0$ et donc $f(z) = \int_\beta \omega$. En considérant des arcs linéaires par morceaux parallèles aux axes on constate que f est une primitive locale de ω au voisinage de tout point de Ω . Par conséquent f est C^1 et $df = \omega$.

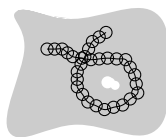
•

Dans toute la suite du chapitre on ne considère que des formes localement exactes.

Soit ω une forme localement exacte sur un ouvert Ω et soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un arc de Ω . Puisque $\gamma([a, b])$ est compact il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $t \in [a, b]$ alors $D_{2\varepsilon}(\gamma(t)) \subset \Omega$. Puisque γ est uniformément continue, il existe $t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_d = b$ tels que $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset D_\varepsilon(\gamma(t_k)) = U_k$ si $k \in \{1, \dots, d\}$. De plus la restriction de ω à chaque disque U_k admet une primitive f_k .

Définitions 31 La famille $\mathcal{U} = (t_k, U_k, f_k)_{1 \leq k \leq d}$ ci dessous est dite *associée* à ω et γ . La *primitive de ω le long de γ et subordonnée* à $(t_k, U_k, f_k)_{1 \leq k \leq d}$ est la fonction $F_{\mathcal{U}}^\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ suivante : si $t \in [t_l, t_{l+1}]$ alors

$$F_{\mathcal{U}}^\gamma(t) = \sum_{0 < k \leq l} (f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1}))) + (f_{l+1}(\gamma(t)) - f_{l+1}(\gamma(t_l))).$$



l'ouvert Ω , l'arc γ et les disques U_k

Remarques 32 La fonction $F_{\mathcal{U}}^\gamma$ est continue et si γ est C^1 par morceaux alors $F_{\mathcal{U}}^\gamma(t) = \int_{\gamma_a}^t \omega$. En particulier si $\omega = df$ alors $F_{\mathcal{U}}^\gamma(t) = f(\gamma(t)) - f(\gamma(a))$.

Proposition 63 La primitive $F_{\mathcal{U}}^\gamma$ de ω le long de γ ne dépend pas de \mathcal{U} .

Preuve Soit \mathcal{U} et \mathcal{V} associées à ω et γ et soit $F_{\mathcal{U}}^\gamma$ et $F_{\mathcal{V}}^\gamma$ les primitives subordonnées. L'ensemble $E = \{t \in [a, b] : F_{\mathcal{U}}^\gamma(t) - F_{\mathcal{V}}^\gamma(t) = 0\}$ est un fermé et il est non vide car il contient a . Il suffit donc de montrer qu'il est ouvert puisque $[a, b]$ est connexe. Soit $t \in E$, U un disque ouvert de centre

$\gamma(t)$ inclus dans les U_k et les V_l qui contiennent $\gamma(t)$ et f une primitive de ω sur U . Puisque deux primitives de ω sur U ne diffèrent que d'une constante, il résulte de la définition de $F_{\mathcal{U}}^\gamma$ et de $F_{\mathcal{V}}^\gamma$ que si t' est voisin de t alors

$$F_{\mathcal{U}}^\gamma(t') - F_{\mathcal{U}}^\gamma(t) = f(\gamma(t')) - f(\gamma(t)) = F_{\mathcal{V}}^\gamma(t') - F_{\mathcal{V}}^\gamma(t).$$

Par conséquent E est ouvert.

•

Notation 12 Puisque $F_{\mathcal{U}}^\gamma$ ne dépend pas de \mathcal{U} on la note F^γ et on pose $\int_\gamma \omega = F^\gamma(b) - F^\gamma(a)$. Ceci n'est défini que si ω est localement exacte.

Remarques 33 L'application qui à ω localement exacte associe $\int_\gamma \omega$ est une forme \mathbf{C} -linéaire.

Soit $\gamma = \alpha + \beta$. Alors $\int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$.

Soit $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un homéomorphisme croissant, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un arc et ω une forme localement exacte définie sur Ω . Si ϕ et γ sont C^1 par morceaux alors $F^{\gamma \circ \phi}(d) = F^\gamma(b)$.

En utilisant les propriétés de linéarité de l'intégrale par rapport à l'addition des arcs on obtient facilement (un dessin peut aider) :

Proposition 64 Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$, $\beta : [c, d] \rightarrow \Omega$ deux arcs, ω une forme localement exacte définie sur Ω et $[u, u+w] \subset [a, b]$, $[v, v+w] \subset [c, d]$. On suppose que $\alpha(u+t) = \beta(v+w-t)$ si $0 \leq t \leq w$. Alors

$$\int_\alpha \omega + \int_\beta \omega = \int_{\alpha_a^u} \omega + \int_{\alpha_{u+w}^b} \omega + \int_{\alpha_c^v} \omega + \int_{\alpha_{v+w}^d} \omega.$$

Définition 32 Deux lacets $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ sont *homotopes* dans Ω s'il existe $\Gamma : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ continue telle que $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)$ et $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a, b]$ et $\Gamma(\lambda, a) = \Gamma(\lambda, b)$ si $\lambda \in [0, 1]$. Ils sont dit *homotopes à origine fixée* lorsque $\Gamma(\lambda, a)$ est indépendant de λ .

Exemple 20 Soit $f(z) = a_1 z + \dots \in \mathbf{C}\{z\}$ ($a_1 \neq 0$). Si $r > 0$ petit alors le lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$ défini par $\gamma(t) = r \exp(2i\pi t)$ est homotope dans \mathbf{C}^* à $f \circ \gamma$. Pour le voir on écrit $f(z) = s \exp(2i\pi u) z (1 + g(z))$ avec $g \in \mathbf{C}\{z\}$ et $g(0) = 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|z| < \varepsilon$ alors et $|g(z)| < 1$. Choisissons $r \in]0, \varepsilon[$. L'application

$$(\lambda, t) \in [0, 1]^2 \mapsto \Gamma(\lambda, t) = (1 + \lambda(\frac{s}{r} - 1)) \exp(\lambda 2i\pi u) \gamma(t) (1 + \lambda g(\gamma(t)))$$

est une homotopie dans \mathbf{C}^* entre les deux lacets.

Théorème 17 Si ω est une forme localement exacte définie sur un ouvert Ω et si γ_0 et γ_1 sont des lacets homotopes dans Ω alors $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Preuve Soit $\lambda \in [a, b]$ et soit $\mathcal{U} = (t_k, U_k, f_k)_{1 \leq k \leq d}$ associée à $\gamma_\lambda = [a, b] \rightarrow \Omega$, $\gamma_\lambda(t) = \Gamma(\lambda, t)$. Si un μ est voisin de λ alors $\mathcal{U} = (t_k, U_k, f_k)_{1 \leq k \leq d}$ est encore associée à γ_μ . On a $\int_{\gamma_\lambda} \omega = \sum_{0 < k \leq d} (f_k(\gamma_\lambda(t_k)) - f_k(\gamma_\lambda(t_{k-1})))$ et $\int_{\gamma_\mu} \omega = \sum_{0 < k \leq d} (f_k(\gamma_\mu(t_k)) - f_k(\gamma_\mu(t_{k-1})))$. Donc la différence $\int_{\gamma_\lambda} \omega - \int_{\gamma_\mu} \omega$ est égale à

$$\sum_{0 < k \leq d} ((f_k(\gamma_\lambda(t_k)) - f_k(\gamma_\mu(t_k))) - (f_k(\gamma_\lambda(t_{k-1})) - f_k(\gamma_\mu(t_{k-1}))))$$

ou encore à

$$-(f_1(\gamma_\lambda(a)) - f_1(\gamma_\mu(a))) + \sum_{0 < k < d} ((f_k(\gamma_\lambda(t_k)) - f_k(\gamma_\mu(t_k))) - (f_{k+1}(\gamma_\lambda(t_k)) - f_{k+1}(\gamma_\mu(t_k)))) + (f_d(\gamma_\lambda(b)) - f_d(\gamma_\mu(b))).$$

Puisque deux primitives de ω sur un ouvert connexe ne diffèrent que d'une constante, on remarque que si $0 < k < d$ alors

$$(f_k(\gamma_\lambda(t_k)) - f_k(\gamma_\mu(t_k))) - (f_{k+1}(\gamma_\lambda(t_k)) - f_{k+1}(\gamma_\mu(t_k))) = 0.$$

Finalement $\int_{\gamma_\lambda} \omega - \int_{\gamma_\mu} \omega$ est égale à

$$(f_d(\gamma_\lambda(b)) - f_d(\gamma_\mu(b))) - (f_1(\gamma_\lambda(a)) - f_1(\gamma_\mu(a)))$$

ou encore à

$$(f_d(\gamma_\lambda(b)) - f_1(\gamma_\lambda(a))) - (f_d(\gamma_\mu(b)) - f_1(\gamma_\mu(a))).$$

Or les fonctions f_1, f_d diffèrent d'une constante sur $U_1 \cap U_d$ car ce sont des primitives de ω sur $U_1 \cap U_d$ qui est connexe. De plus, $\gamma_\lambda(a) = \gamma_\lambda(b)$ et $\gamma_\mu(a) = \gamma_\mu(b)$. Par conséquent

$$(f_d(\gamma_\lambda(b)) - f_1(\gamma_\lambda(a))) = (f_d(\gamma_\mu(b)) - f_1(\gamma_\mu(a)))$$

et donc $\int_{\gamma_\lambda} \omega - \int_{\gamma_\mu} \omega = 0$.

•

Une application de ce théorème est la formule de Cauchy pour les fonctions analytiques.

Théorème 18 (*formule de Cauchy pour les fonctions analytiques*) Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} , $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D_R(z_0) \subset \Omega$ et $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus \{z_0\}$ un lacet homotope à $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$, $\Gamma(t) = z_0 + R \exp(2i\pi t)$ dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Alors

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad \text{si } k \in \mathbf{N}.$$

Preuve La forme $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$ est localement exacte dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Le lacet γ est homotope dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ à tout cercle $\Gamma_r: [0, 1] \rightarrow \Omega$, $\Gamma_r(t) = z_0 + r \exp(2i\pi t)$ avec $r \in]0, R]$. On a donc

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

si $r \in]0, R]$. On a aussi par définition

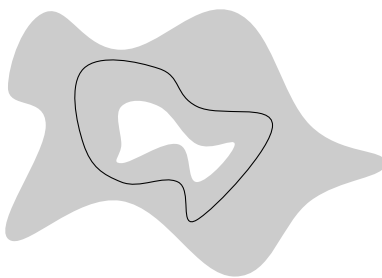
$$\int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r \exp(it))}{(r \exp(it))^{k+1}} i r \exp(it) dt.$$

On choisit r inférieur au rayon de convergence de la série entière associée à f en z_0 et on conclut à l'aide de la formule de Cauchy pour les séries entières.

•

On verra dans le chapitre suivant de nombreuses conséquences de cette formule.

Définitions 33 Soit Ω un ouvert connexe et z_0 un point fixé de Ω . Soit \mathcal{L}_{z_0} l'ensemble des lacets de Ω d'origine z_0 et paramétrés par $[0,1]$. Cet ensemble est stable par addition des lacets, par passage à l'opposé, l'addition est associative et le lacet z_0 est le neutre pour l'addition. Par conséquent $(\mathcal{L}_{z_0}, +)$ est un groupe. La relation être homotope à origine fixée est une relation d'équivalence dans \mathcal{L}_{z_0} compatible avec l'addition. Le groupe quotient s'appelle *premier groupe fondamental de (Ω, z_0)* et il est noté $\Pi_1(\Omega, z_0)$. Si z_1 est un autre point de Ω on montre que le groupe $\Pi_1(\Omega, z_1)$ est isomorphe à $\Pi_1(\Omega, z_0)$. Pour cela on considère un arc α d'extrémités z_1 et z_0 et on commence par remarquer que si $\gamma \in \mathcal{L}_{z_0}$ alors $\alpha + \gamma - \alpha$ appartient à \mathcal{L}_{z_1} . On peut donc parler du groupe fondamental de Ω et on le note $\Pi_1(\Omega)$. Il est clair que deux ouverts de \mathbf{C} qui sont homéomorphes ont même groupe fondamental. Cette notion essentielle en topologie est due à Henri Poincaré. On dit que Ω est *simplement connexe* si $\Pi_1(\Omega, z_0)$ est nul. Ceci est équivalent à supposer que tout lacet de Ω est homotope à un point. C'est le cas par exemple de \mathbf{C} où de D_1 . On vérifie sans peine les deux propositions suivantes :



lacet non homotope à un point dans un ouvert non simplement connexe

Proposition 65 Soit $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homéomorphisme entre deux ouverts de \mathbf{C} . Si l'un est simplement connexe l'autre aussi.

Proposition 66 Les ouverts $\mathbf{C}, \Omega_\theta, \Omega_+, \Omega^-, B_t, D_r(z)$ sont simplement connexes.

Remarques 34 Si ω est une forme localement exacte définie sur Ω alors il résulte de ce qui précède que si γ_0 et γ_1 représentent le même élément de $\Pi_1(\Omega, z_0)$ alors $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ et par conséquent on définit une application $[\omega] : \Pi_1(\Omega, z_0) \rightarrow \mathbf{C}$ qui à la classe $[\gamma]$ d'un élément γ de \mathcal{A}_{z_0} associe $\int_\gamma \omega$. Vu la propriété d'addition de l'intégrale, cette application est un morphisme de groupe. Sur Ω simplement connexe cette application est nulle. Ainsi :

Proposition 67 Toute forme localement exacte définie sur un ouvert simplement connexe de \mathbf{C} est exacte.

La réciproque est vraie et sera vue ultérieurement.

Exemple 21 L'ouvert \mathbf{C}^* n'est pas simplement connexe car $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = 2i\pi$.

Définition 34 Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ un lacet. On appelle *indice de γ par rapport à z_0* et on note $\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ le nombre $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$.

Proposition 68 Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C}^* . Il existe une détermination du logarithme sur Ω si et seulement si $\text{Ind}_0(\gamma) = 0$ pour tout lacet de γ .

Preuve C'est juste une reformulation de la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{dz}{z}$ soit exacte sur Ω .

•

L'indice d'un lacet par rapport à z_0 dans $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ est un invariant d'homotopie. Nous allons montrer que c'est un entier qui caractérise les lacets de Ω à homotopie près.

Proposition 69 Si $z_0 \in \mathbf{C}$ et $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ est un lacet alors l'indice $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) \in \mathbf{Z}$.

Preuve Quitte à faire une translation on peut supposer que $z_0 = 0$. Soit F^γ une primitive de la forme localement exacte $\frac{dz}{z}$ le long de γ . Si $t \in [a, b]$ on pose $g(t) = \frac{\gamma(a)}{\gamma(t)} \exp(F^\gamma(t))$. Montrons que g vaut 1. Puisque $g(a) = 1$ et que $[a, b]$ est connexe il suffit de montrer que g est localement constante. Fixons $t \in [a, b]$. Soit U une détermination du logarithme sur un disque U centré en $\gamma(t)$. Il existe ε tel que si $t' \in [a, b]$ et $|t' - t| < \varepsilon$ alors $\gamma(t') \in U$. Par construction de F^γ , on a $F^\gamma(t') - F^\gamma(t) = l(\gamma(t')) - l(\gamma(t))$ et donc

$$g(t') = \frac{\gamma(t)}{\gamma(t')} g(t) \frac{\gamma(t')}{\gamma(t)} = g(t).$$

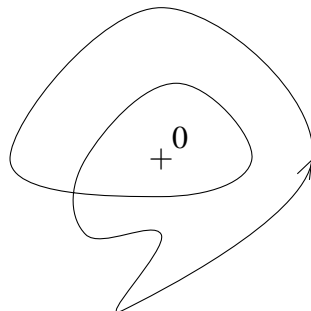
Ainsi g est localement constante et donc vaut constamment 1. Par conséquent $F^\gamma(t)$ est une détermination du logarithme de $\frac{\gamma(t)}{\gamma(a)}$. En prenant $t = b$ on obtient que $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ est une détermination du logarithme de $1 = \frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}$. Ainsi $\int_\gamma \frac{dz}{z} \in 2i\pi\mathbf{Z}$ et $\text{Ind}_0(\gamma) \in \mathbf{Z}$.

•

Remarques 35 Puisque $\frac{dz}{z} = d \log |z| + i \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ et que $d \log |z|$ est exacte on a si $z_0 = 0$, $\text{Ind}_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

L'indice $\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ mesure le nombre de tours du lacet γ autour de z_0 . Plus précisément on a :

Proposition 70 Soit γ de $[0, 1]$ dans $C_r^R(z_0)$ (resp. $S_\eta(z_0)$) un lacet et $n \in \mathbf{Z}$. Alors $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = n$ si et seulement si γ est homotope dans $C_r^R(z_0)$ (resp. dans $S_\eta(z_0)$) au lacet $\Gamma_{z_0, \eta}^n$ défini par $\Gamma_{z_0, \eta}^n(t) = z_0 + \eta \exp(2i\pi nt)$ si $t \in [0, 1]$ et où $\eta \in]r, R[$.



courbe d'indice 2 par rapport à l'origine

Preuve Soit F^γ une primitive de $\frac{dz}{z - z_0}$ le long de γ . Puisque $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = n$, $F^\gamma(1) = 2i\pi n$. Soit $\lambda > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\gamma(0) = z_0 + \lambda \exp(i\theta)$. L'application $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ définie par

$$\Gamma(s, t) = z_0 + \lambda^s \eta^{1-s} \exp(2i\pi(1-s)nt + sF^\gamma(t) + si\theta)$$

est l'homotopie recherchée.

L'indice de $\Gamma_{z_0, \eta}^n$ est n car $\int_{\Gamma_{z_0, \eta}^n} \frac{dz}{z-z_0} = n \int_{\Gamma_{z_0, \eta}^1} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi n$.

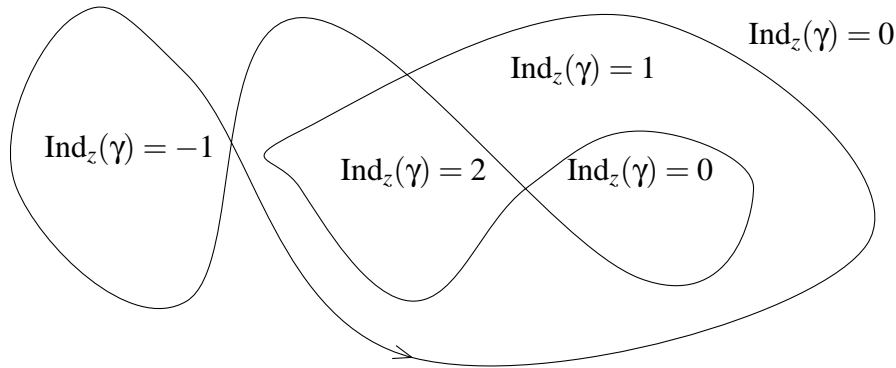
•

Remarque 36 On vient de prouver que le groupe fondamental d'une couronne ou d'un cercle est isomorphe au groupe \mathbf{Z} .

Proposition 71 Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un lacet et Ω une composante connexe de $\mathbf{C} \setminus \gamma([a, b])$. Si $z_0, z_1 \in \Omega$ alors $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \text{Ind}_{z_1}(\gamma)$.

Preuve Puisque Ω est connexe il suffit de montrer que la fonction $z \in \Omega \mapsto \text{Ind}_z(\gamma)$ est localement constante. Fixons $z \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon(z) \in \Omega$. Soit $z' \in D_\varepsilon(z)$. On pose $\gamma_{z'} = \gamma - z'$. On a $\text{Ind}_0(\gamma_{z'}) = \text{Ind}_{z'}(\gamma)$. Il suffit donc de montrer que $\text{Ind}_0(\gamma_{z'}) = \text{Ind}_0(\gamma_z)$. Si $s \in [0, 1]$ et $t \in [a, b]$ on pose $\Gamma_{z'}(s, t) = \gamma(t) - sz' - (1-s)z$. L'application Γ est une homotopie entre γ_z et $\gamma_{z'}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ donc $\text{Ind}_0(\gamma_{z'}) = \text{Ind}_0(\gamma_z)$.

•



variation de l'indice d'une courbe par rapport à un point

Corollaire Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} . Si $\mathbf{C} \setminus \Omega$ est connexe non borné alors pour tout lacet γ de Ω et tout $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \Omega$, l'indice $\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est nul.

Preuve L'indice $\text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ ne dépend pas de $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \Omega$ car $\mathbf{C} \setminus \Omega$ est connexe. Puisque $\mathbf{C} \setminus \Omega$ est non borné il existe $R > 0$ et $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \Omega$ tels que $\gamma \subset D_R$ et $z_0 \notin D_R$. Or sur D_R la forme $\frac{dz}{z-z_0}$ est exacte donc $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 0$.

•

Proposition 72 Si γ est un lacet d'un ouvert simplement connexe Ω et si $z_0 \notin \Omega$ alors $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = 0$.

Preuve En effet γ est homotope à un point dans Ω et l'indice d'un lacet constant est nul.

•

Corollaire Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C}^* . Si Ω est simplement connexe alors il existe une détermination du logarithme sur Ω .

Corollaire Soit $R \in]0, +\infty]$ et K un compact non vide de D_R . Alors $D_R \setminus K$ n'est pas simplement connexe.

Preuve Soit $r \in]0, R[$ tel que $K \subset D_r$. L'origine et z_0 sont dans la même composante connexe de $\mathbf{C} \setminus S_r$. Par conséquent $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \text{Ind}_0(\gamma) = 1$ avec $\gamma(t) = r \exp(2i\pi t)$ si $t \in [0, 1]$. Ainsi la

forme $\frac{dz}{z-z_0}$ est localement exacte mais elle n'est pas exacte sur Ω . En particulier Ω n'est pas simplement connexe.

•

Définition 35 Une *courbe de Jordan* J est l'image par un homéomorphisme du cercle unité. On confond une courbe de Jordan et son image. On appelle *courbe de Jordan paramétrée par l'abscisse curviligne* une courbe de Jordan C^1 par morceaux qui peut être munie d'une paramétrisation par l'abscisse curviligne.

Exemples 22 Un cercle, le bord d'un triangle, d'un rectangle et généralement d'un polygone convexe ou étoilé sont des courbes de Jordan paramétrées par l'abscisse curviligne. Le dessin d'un "huit" n'est pas une courbe de Jordan.

Proposition 73 Soit J une courbe de Jordan paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors J sépare \mathbf{C} en deux composantes connexes, l'une notée C_∞ est non bornée et l'autre notée C_0 est bornée. Si $z \in C_\infty$ alors $\text{Ind}_z(\gamma) = 0$ et si $z \in C_0$ alors est $|\text{Ind}_z(\gamma)| = 1$.

Remarque 37 L'hypothèse de paramétrisation par l'abscisse curviligne est superflue mais simplifie grandement la démonstration.

Preuve Soit $t \in]a, b[$ et $p = \gamma(t)$. Il existe $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, un voisinage ouvert et carré U de p et une isométrie affine ϕ tels que

- $\phi(U) =]-\varepsilon, \varepsilon[$,

- $U \cap J = \gamma(]t - \eta, t + \eta[)$ si $t \neq a$ et $U \cap J = \gamma([b - \eta, b] \cup [a, a + \eta[)$ si $t = a$,

- $\phi(U \cap J) = \{(x, f(x)) : x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$ ou

$\phi(U \cap J) = \{(x, g(x)) : x \in [0, \varepsilon[\} \cup \{(x, h(x)) : x \in [0, \varepsilon[\}$ avec f et g des fonctions C^1 par morceaux et nulles en 0 et telles que $f(x) < g(x)$ si $x \in]0, \varepsilon[$.

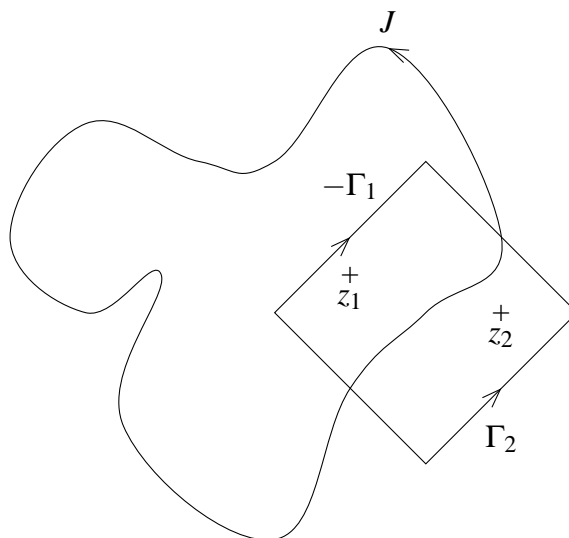
Par conséquent $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \phi(U \cap J)$ a deux composantes connexes D_1 et D_2 et $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap (\overline{D_k} \setminus D_k) = \phi(U \cap J)$ si $k = 1, 2$. Puisque ϕ est une isométrie affine, l'ensemble $U \cap J$ a deux composantes connexes C_1 et C_2 et $U \cap (\overline{C_k} \setminus C_k) = U \cap J$ si $k = 1, 2$.

Montrons que $\mathbf{C} \setminus J$ a au plus deux composantes connexes Soit C une composante connexe de $\mathbf{C} \setminus J$. Alors $\overline{C} \setminus C$ est non fermé et non vide car C est un ouvert non vide et différent de \mathbf{C} . De plus $\overline{C} \setminus C \subset J$ puisque C est une composante connexe de $\mathbf{C} \setminus J$. Soit $p \in \overline{C} \setminus C$. D'après ce qui précède il existe un voisinage U de p tel que $U \cap J = U \cap (\overline{C} \setminus C)$. Ainsi $\overline{C} \setminus C$ est non vide, fermé et ouvert dans J qui est connexe. Par conséquent $J = \overline{C} \setminus C$. Soit C_1, C_2 et C_3 des composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus J$ et soit $p \in J$. D'une part $p \in \overline{C_k}$ si $k = 1, 2, 3$. D'autre part il existe un voisinage U de p tel que $U \setminus J$ ne rencontre au plus que deux d'entre elles. Par conséquent deux des trois ensembles $C_k, k = 1, 2, 3$ sont confondus.

Montrons que $\mathbf{C} \setminus J$ a exactement deux composantes connexes. Soit t, p, U, ϕ, C_1 et C_2 comme ci dessus. Soit $z_1 \in C_1$ et $z_2 \in C_2$. On suppose γ de classe C^1 au voisinage de t . On décompose J en deux parties : $J' = \overline{U} \cap J$ et $J'' = J \setminus J'$. On décompose le bord ∂U de U en deux parties $\Gamma_k = \partial U \cap \overline{C_k}$. On a $\text{Ind}_{z_k}(\partial U) = \text{Ind}_{z_k}(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 1$. Quitte à permuter z_1, C_1 et z_2, C_2 et on obtient des lacets en mettant bout à bout J'' et $-\Gamma_1$ et en mettant bout à bout J'' et Γ_2 . Or $J'' - \Gamma_1$ est homotope à J dans $\mathbf{C} \setminus \{z_2\}$ et $J'' + \Gamma_2$ est homotope à J dans $\mathbf{C} \setminus \{z_1\}$ et z_1 et z_2 sont dans la même composante connexe de $\mathbf{C} \setminus (J'' - \Gamma_1)$. Par conséquent, $\text{Ind}_{z_1}(J) = \text{Ind}_{z_1}(J'' + \Gamma_2)$, $\text{Ind}_{z_2}(J) = \text{Ind}_{z_2}(J'' - \Gamma_1) = \text{Ind}_{z_1}(J'' - \Gamma_1)$ et donc $\text{Ind}_{z_1}(J) - \text{Ind}_{z_2}(J) = \text{Ind}_{z_1}(J'' + \Gamma_2) - \text{Ind}_{z_1}(J'' - \Gamma_1) = \text{Ind}_{z_1}(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \text{Ind}_{z_1}(\partial U) = 1$. Ainsi z_1 et z_2 sont dans deux composantes connexes différentes et $\text{Ind}_{z_1}(J) - \text{Ind}_{z_2}(J) = 1$. Ceci prouve que $\mathbf{C} \setminus J$ a deux composantes

exactement. Or si z est dans la composante non bornée alors $\text{Ind}_z(J) = 0$. Le calcul précédent montre donc que si z est dans la composante bornée alors $|\text{Ind}_z(J)| = 1$.

•



séparation par une courbe de Jordan

On déduit de cette proposition que si J est une courbe de Jordan paramétrée par l'abscisse curviligne, elle possède deux familles de paramétrisations par l'abscisse curviligne. Les unes, dites *positivement orientées*, sont d'indice 1 par rapport à tout point dans la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus J$ alors que les autres, dites *négativement orientées*, sont d'indices -1 . Le passage de deux paramétrisations dans la même classe se fait par changement d'origine. On désigne par J^+ (resp. J^-) la courbe J munie d'une quelconque paramétrisation par l'abscisse curviligne positivement orientée (resp. négativement orientée).

Dès qu'il existe une détermination du logarithme sur un ouvert connexe il existe une détermination de la racine carrée. Nous allons maintenant montrer une réciproque partielle, réservant à plus tard la preuve de la réciproque.

Proposition 74 Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C}^* et $J^+ \subset \Omega$ une courbe de Jordan paramétrée par l'abscisse curviligne positivement orientée. Si l'indice $\text{Ind}_0(J^+)$ vaut 1 alors il n'existe pas de détermination de la racine carrée sur Ω .

Preuve On note $\gamma: [0, L] \rightarrow \Omega$ la paramétrisation de la courbe J^+ . Supposons qu'il existe une détermination g de la racine carrée sur Ω . Alors $g(\gamma(0)) = g(\gamma(L))$ car $\gamma(0) = \gamma(L)$. Mais aussi

$$g(\gamma(t)) = g((0)) \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\gamma_0}^{\gamma_t} \frac{dz}{z}\right) \text{ si } t \in [0, L].$$

En particulier $g(\gamma(L)) = -g(\gamma(0))$. C'est la contradiction recherchée.

•

X Théorie de Cauchy, analyticité des fonctions holomorphes

Proposition 75 *L'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de \mathbf{C} est une algèbre différentielle.*

Preuve C'est immédiat quand on a remarqué que si f et g sont \mathbf{C} -dérivables en z de \mathbf{C} -dérivées $f'(z)$ et $g'(z)$ alors $f + g$, λf et fg sont \mathbf{C} -dérivables en z de dérivées $f'(z) + g'(z)$, $\lambda f'(z)$ et $f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$. Par exemple pour montrer la formule de Leibniz on écrit

$$f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z) = (f(z+h) - f(z))g(z+h) + (g(z+h) - g(z))f(z),$$

on divise par h et on passe à la limite en z_0 .

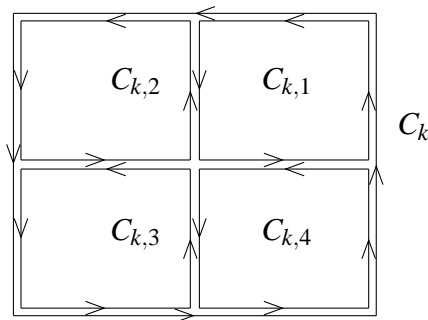
Proposition 76 (lemme de Goursat) *Si f holomorphe sur un Ω ouvert de \mathbf{C} alors $\omega = fdz$ est localement exacte.*

Preuve Considérons un rectangle C dont l'adhérence est contenue dans Ω et soit J^+ une paramétrisation par l'abscisse curviligne positivement orientée de son bord. On note δ la longueur de J^+ . On pose $J_0^+ = J^+$, $C_0 = C$ et $I_0 = \int_{J_0^+} \omega$. Il suffit de montrer que $I_0 = 0$.

Considérons la suite de rectangles emboîtés C_k dont le bord est de longueur $\delta/2^k$ définie de la façon suivante.

Soit $k \in \mathbf{N}$. On suppose avoir construit C_k . On considère une paramétrisation J_k^+ par l'abscisse curviligne positivement orientée de son bord et on pose $I_k = \int_{J_k^+} \omega$. On divise C_k en quatre rectangles égaux de périmètres $\delta/2^{k+1}$ $C_{k,i}$, $1 \leq i \leq 4$. On note $J_{k,i}^+$ une paramétrisation par l'abscisse curviligne positivement orientée du bord de $C_{k,i}$. On pose $I_{k,i} = \int_{J_{k,i}^+} \omega$. Le bord de C_k est recouvert par huit cotés des rectangles $C_{k,i}$ "parcourus dans le même sens". Les huit autres cotés des rectangles $C_{k,i}$ sont deux à deux confondus mais avec des sens de parcours opposés. Par conséquent $I_k = \sum_{i=1}^4 I_{k,i}$. Il existe donc $i_k \in \{1, \dots, 4\}$ tel que $|I_{k,i_k}| \geq \frac{|I_k|}{4}$. On pose $C_{k+1} = C_{k,i_k}$.

On a $|I_k| \geq \frac{|I_0|}{4^k}$.



les rectangles $C_k, C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,3}$ et $C_{k,4}$

L'intersection $\cap_k C_k$ de la suite de rectangles emboîtés C_k est un point z_∞ . Il existe $g : C \rightarrow \mathbf{C}$, continue sur C , nulle en z_∞ et telle que $f(z) = f(z_\infty) + f'(z_\infty)(z - z_\infty) + g(z)(z - z_\infty)$ si $z \in C$. La forme $(f(z_\infty) + f'(z_\infty)(z - z_\infty))dz$ est exacte par conséquent

$$I_k = \int_{J_k^+} g(z)(z - z_\infty)dz$$

et

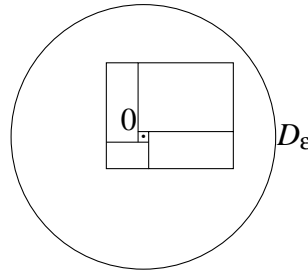
$$|I_k| \leq (\delta/2^k) \cdot \sup_{C_k} |g(z)| \cdot \sup_{C_k} |z - z_\infty|.$$

Or dans C_k $|z - z_\infty|$ est plus petit que le périmètre de C_k donc plus petit que $\delta/2^k$. Par conséquent $\sup_{C_k} |g(z)| = M_k$ est une suite qui tend vers 0 et $\frac{|I_0|}{4^k} \leq |I_k| \leq (\delta^2/4^k)M_k$. Par conséquent $|I_0| \leq \delta^2 M_k$ quelque soit k et donc $I_0 = 0$.

•

Proposition 77 (lemme de Goursat généralisé) Soit $f : D_\epsilon \rightarrow \mathbf{C}$ continue et dont la restriction à $D_\epsilon \setminus \{0\}$ est holomorphe alors $\omega = f dz$ est exacte.

Preuve Il suffit de montrer que si R est un rectangle inclus dans D_ϵ alors $I = \int_{\partial R^+} \omega = 0$. On remarque déjà que $\int_{\partial R^+} \omega$ tend vers 0 si le périmètre de R tend vers 0. En effet, soit $R \not\subset D_{\epsilon/2}$ et alors $0 \notin \bar{R}$ et donc $\int_{\partial R^+} \omega = 0$, soit $R \subset D_{\epsilon/2}$ et alors $|\int_{\partial R^+} \omega| \leq \sup_{D_{\epsilon/2}} |f| \cdot \text{longueur de } \partial R$.

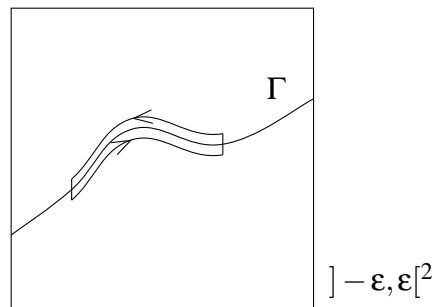


Fixons un rectangle R inclus dans D_ϵ . Si $0 \notin \bar{R}$ alors $I = 0$. Supposons donc $0 \in \bar{R}$. Si $\eta > 0$ il existe une décomposition de R en au plus cinq rectangles (suivant la position relative de 0 et de R), le premier R_η a un périmètre inférieur à η et c'est le seul dont l'adhérence rencontre 0. Par conséquent $I = \int_{\partial R_\eta^+} \omega = I_\eta$ et donc $|I|$ qui est arbitrairement petit est nul.

•

Proposition 78 Soit $g :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbf{C}^1$ et $f :]-\epsilon, \epsilon[^2 \rightarrow \mathbf{C}$ continue. Si f est holomorphe hors de $\Gamma = \{x + ig(x) : x \in]-\epsilon, \epsilon[\}$ alors $\omega = f dz$ est exacte.

Preuve Il suffit de montrer que ω est localement exacte. L'ensemble $]-\epsilon, \epsilon[^2$ est connexe par morceaux verticaux ou parallèles aux courbes $\Gamma_\eta = \{x + ig(x) + i\eta : x \in]-\epsilon, \epsilon[\}$. Il suffit donc de montrer que $I = \int_{\partial R^+} \omega = 0$ si R est un rectangle "tordu" du type suivant : il existe $\eta < \mu$ et $a < b$ tels que ∂R est la réunion des deux courbes $\Gamma_{\eta_a}^b = \{x + ig(x) + i\eta : x \in [a, b]\}$ et $\Gamma_{\mu_a}^b = \{x + ig(x) + i\mu : x \in [a, b]\}$ et des segments verticaux reliant les extrémités de ces courbes. C'est bien une condition suffisante car cette famille de rectangles tordus se redresse par $(x, y) \mapsto (x, y - g(x))$ en une famille de rectangles à cotés parallèles aux axes.



rectangle tordu bordant une portion de Γ

Si η et μ sont de même signe le rectangle R ne rencontre pas Γ et $\int_{\partial R^+} \omega = 0$.
 Supposons $\eta < 0 < \mu$. Soit $\lambda > 0$ petit. Les courbes $\Gamma_{-\lambda a}^b$ et $\Gamma_{\lambda a}^b$ permettent de découper R en trois rectangles dont un seul R_λ rencontre Γ . Par conséquent $I = \int_{\partial R^+} \omega = \int_{\partial R_\lambda^+} \omega$. Le rectangle R_λ est bordé par les courbes $\Gamma_{-\lambda a}^b$ et $\Gamma_{\lambda a}^b$ ainsi que par les segments verticaux $\{a + iy : -\lambda + g(a) < y < \lambda + g(a)\}$ et $\{b + iy : -\lambda + g(b) < y < \lambda + g(b)\}$. Lorsque λ tend vers 0, les contributions des deux verticales à $\int_{\partial R_\lambda^+} \omega$ tendent vers 0. Puisque $\Gamma_{-\lambda a}^b$ est parcouru de gauche à droite et $\Gamma_{\lambda a}^b$ de droite à gauche lorsqu'on paramétrise R_λ^+ on en déduit que la somme des contributions de $\Gamma_{-\lambda a}^b$ et de $\Gamma_{\lambda a}^b$ dans $\int_{\partial R_\lambda^+} \omega$ tend vers 0 quand λ tend vers 0. Par conséquent $|I| = |\int_{\partial R_\lambda^+} \omega|$ est arbitrairement petit donc nul.

•

Corollaire (seconde généralisation du lemme de Goursat) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ continue. On suppose que f est holomorphe en dehors d'un arc C^1 par morceaux paramétré par l'abscisse curviligne plongé dans Ω . Alors $\omega = fdz$ est localement exacte.

Preuve Hors de l'arc c 'est la conclusion du lemme de Goursat. Au voisinage d'un point intérieur de γc 'est la proposition précédente. Au voisinage d'une extrémité de γc 'est le lemme de Goursat généralisé.

•

Théorème 19 (première formule de Cauchy) Soit $f : D_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, $0 < \eta < \varepsilon$ et $|z_0| < \eta$. Alors si $k \in \mathbf{N}$,

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{S_\eta^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Preuve Puisque le cercle orienté S_η^+ est homotope dans $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ au cercle $S_1(z_0)^+$, on a $\int_{S_\eta^+} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{S_1(z_0)^+} \frac{1}{z - z_0} dz = 2i\pi$.

On note $g : D_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction qui vaut $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ si $z \neq z_0$ et qui vaut $f'(z_0)$ en z_0 . C'est une fonction continue sur D_ε et holomorphe hors de z_0 . Par conséquent $\int_{S_\eta^+} g(z) dz = 0$. Donc $\frac{1}{2i\pi} \int_{S_\eta^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{f(z_0)}{2i\pi} \int_{S_\eta^+} \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0)$. On conclut en utilisant la formule intégrale fondamentale.

•

On déduit de la formule de Cauchy et de la formule intégrale fondamentale le corollaire suivant :

Corollaire Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe alors f est analytique.

C'est un résultat remarquable qui montre que la \mathbf{C} -dérivabilité est une condition radicalement plus forte que la \mathbf{R} -différentiabilité.

Théorème 20 (de Morera) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ continue. La fonction f est holomorphe si et seulement si la forme $\omega = fdz$ est localement exacte.

Preuve Supposons ω localement exacte. Soit $z_0 \in \Omega$ et F une primitive de ω sur un voisinage U de z_0 . Montrons que f est analytique sur U . Puisque F est une primitive de fdz , F est holomorphe et $F' = f$. Donc F et F' analytiques (holomorphe) sur U . La condition est donc suffisante. Le lemme de Goursat affirme qu'elle est nécessaire.

•

En combinant le résultat de Morera et celui de Goursat on obtient :

Corollaire Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ continue. Si f est holomorphe en dehors d'un arc C^1 par morceaux paramétré par l'abscisse curviligne plongé dans Ω alors f est holomorphe.

On déduit de corollaire un théorème de prolongement :

Théorème 21 (principe de réflexion de Schwarz) Soit $D_\varepsilon^+ = \{|z| < \varepsilon, \text{Im } z \geq 0\}$ et soit $f : O(D_\varepsilon^+) \rightarrow \mathbf{C}$ continue. On suppose que f est holomorphe à l'intérieur de D_ε^+ et que $f(x) \in \mathbf{R}$ si $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Alors f se prolonge holomorphiquement à D_ε en posant $F(z) = f(z)$ si $z \in D^+ \varepsilon$ et $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $z \in D_\varepsilon \setminus D_\varepsilon^+$.

Preuve Si $z \in D_\varepsilon^+ \setminus D_\varepsilon^+$ et $f \in \mathbf{C}$ petit alors $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{f(z+h)-f(\bar{z})}{h} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+h)-f(\bar{z})}{h}\right)}$. A la limite quand h tend vers 0 on obtient que F est \mathbf{C} -dérivable en z et $F'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$. Puisque f est à valeurs réelles sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ On a si $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\lim_{z \in D_\varepsilon \setminus D_\varepsilon^+ \rightarrow x} F(z) = \lim_{z \in D_\varepsilon \setminus D_\varepsilon^+ \rightarrow x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)} = f(x)$. Ainsi f est bien continu sur D_ε . D'après le corollaire F est holomorphe sur D_ε .

•

On va maintenant déduire de ce corollaire une condition nécessaire et suffisante de prolongement en z_0 d'une application analytique définie au voisinage épointé de z_0 .

Définitions 36 Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} , $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbf{C}$ analytique. Le point z_0 est appelée *singularité isolée* de f . On dit que z_0 est une *singularité effaçable* de f si f se prolonge en une application analytique de Ω dans \mathbf{C} . On dit que z_0 est un *pôle* de f si f est une fonction méromorphe de Ω . On dit que z_0 est une *singularité essentielle* de f si pour tout $r > 0$ on a $f(D_r(z_0)) = \mathbf{C}$.

Exemple 23 Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et si z_0 est un pôle de f alors c'est une singularité effaçable si $\omega_{z_0}(f) \geq 0$. Sinon $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Théorème 22 (de Weierstrass) Soit $z_0 \in \Omega$ et $f \in O(\Omega \setminus \{z_0\})$. Si z_0 n'est ni une singularité effaçable ni une singularité essentielle alors $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Preuve Supposons que z_0 n'est pas une singularité essentielle. Il existe alors $D_r(z_0) \subset \Omega$ ($r > 0$), $v \in \mathbf{C}$ et $R > 0$ tels que $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap D_R(v) = \emptyset$. Soit $g = \frac{1}{f-v}$ Alors $g \in O(\Omega \setminus \{z_0\})$ et $g(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset D_{1/R}$ donc g est bornée. Soit h définie par $h(z_0) = 0$ et $h(z) = (z - z_0)g(z)$ si $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. La fonction h est continue sur $D_r(z_0)$ et holomorphe hors de z_0 . C'est donc une fonction holomorphe de $D_r(z_0)$ et $f = v + \frac{z-z_0}{h}$ est méromorphe. Ainsi z_0 est une singularité effaçable ou c'est un pôle de f .

•

Corollaire Soit f une fonction entière. Si l'origine n'est pas une singularité essentielle de $f(1/z)$ alors f est un polynôme.

Preuve Sous ces hypothèses il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^d}$ est nul. D'après Liouville f est un polynôme.

•

On peut montrer maintenant :

Proposition 79 Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et injective. Alors f est affine non constante.

Ainsi \mathbf{C} n'est en bijection holomorphe qu'avec lui-même et le groupe des homéomorphismes holomorphes de \mathbf{C} est le groupe affine.

Preuve Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et injective. L'application g qui à $z \in D_1 \setminus \{0\}$ associe $g(z) = f(1/z)$ est à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus f(D_1)$ (injectivité). Puisque $f(D_1)$ est un ouvert, l'origine n'est pas une singularité essentielle de g et l^∞ n'est pas une singularité essentielle de f . La fonction f est donc un polynôme injectif. C'est une application affine non constante.

•

Théorème 23 (théorème des résidus) Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et soit γ un lacet homotope à un point dans Ω et qui évite les pôles de f . Alors la famille $(\text{Res}'_z(f) \text{Ind}'_z(\gamma))_{z' \in \Omega}$ est sommable et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z' \in \Omega} \text{Res}'_{z'}(f) \text{Ind}'_{z'}(\gamma).$$

Preuve L'homotopie de γ à un point se réalise sur un compact K de Ω . Il existe donc un ouvert U qui contient K et qui est relativement compact dans Ω . L'intersection du diviseur de f avec U est un ensemble fini \mathcal{P} . De plus si $z \notin K$ alors $\text{Ind}_z(\gamma) = 0$ puisque γ est homotope à un point de $\mathbf{C} \setminus \{z\}$. Par conséquent si $\text{Res}_z(f) \text{Ind}_z(\gamma) \neq 0$ alors $z \in \mathcal{P}$. La famille $(\text{Res}_z(f) \text{Ind}_z(\gamma))_{z \in \Omega}$ est sommable de somme $\sum_{z \in \mathcal{P}} \text{Res}_z(f) \text{Ind}_z(\gamma)$. Soit $g \in \mathcal{O}(U)$ et R la fraction rationnelle telle que $f = R + g$ sur U . On a $\int_{\gamma} g dz = 0$ car γ est homotope à un point dans U . Ainsi $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} R dz$. On pose $S = R - \sum_{z' \in \mathcal{P}} \frac{\text{Res}_{z'}(f)}{z - z'}$. La forme $\omega = S dz$ est une forme exacte. Ainsi $\int_{\gamma} S dz = 0$ et

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z' \in \mathcal{P}} \text{Res}'_{z'}(f) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z'} dz.$$

En divisant à gauche et à droite par $2i\pi$ on obtient la formule annoncée.

•

Un corollaire du théorème des résidus est la seconde formule de Cauchy.

Théorème 24 (seconde formule de Cauchy) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et γ un lacet homotope à un point dans Ω . Alors on a

$$\text{Ind}(\gamma) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Preuve La fonction $k! \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ appartient à $\mathcal{M}(\Omega)$, z_0 est son unique pôle et le résidu $\text{Res}_{z_0}(k! \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}})$ est égal à la dérivée $f^{(k)}(z_0)$ (formule de Taylor). On conclut avec le théorème des résidus.

•

On déduit de ce résultat et de la formule intégrale fondamentale le fait suivant.

Proposition 80 Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et soit $D_r(z_0)$ un disque inclus dans Ω . Alors le rayon de convergence de la série entière associée à f en z_0 est au moins r .

Preuve Soit $r' \in]0, r[$. On pose $\gamma(t) = z_0 + r' \exp(2i\pi t)$ si $t \in [0, 1]$. On a $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$ si $z \in D_{z_0}^r(r')$ et d'après la formule intégrale fondamentale, le développement en série entière de $f(z_0 + z)$ a un rayon au moins égal à r' pour $r' < r$ quelconque. Il est donc supérieur ou égal à r .

•

Remarques 38 Une fonction entière est donc la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

D'après cette proposition, si A est une série entière de rayon r il existe un point de S_r au voisinage duquel la somme de A n'est pas prolongeable.

Les estimations de Cauchy sont vraies pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sur tout disque fermé inclus dans Ω .

Proposition 81 (estimations de Cauchy) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Si $z \in D_R(z_0)$ et $k \in \mathbf{N}$,

$$|g^{(k)}(z)| \leq \sup_{\zeta \in S_R(z_0)} |g(\zeta)| \frac{k!R}{(R - |z - z_0|)^{k+1}}.$$

Remarque 39 Ces estimations impliquent encore le théorème de D'Alembert. On raisonne par l'absurde. On considère un polynôme P sans zéro et non constant. Il ne s'annule pas donc $1/P$ est analytique. Il est non constant donc $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} 1/P(z) = 0$. La fonction $|1/P|$ est donc bornée par $M > 0$. On en déduit donc que $|(1/P)^{(k)}(0)| \leq k!M/R^k$ quelque soit $R > 0$. Donc $(1/P)^{(k)}(0) = 0$ si $k > 0$. La fonction $1/P$ est somme d'une série entière constante. Elle donc constante ainsi que P . On peut aussi finir le raisonnement en appliquant les estimations de Cauchy en z_0 quelconque avec $k = 1$. On en déduit qu'en tout point $z_0 \in \mathbf{C}$ $(1/P)'(z_0) = 0$. Par conséquent $1/P$ et P sont constantes.

Le théorème des résidus appliqué à la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe est un moyen de compter ses zéros et ses pôles.

Proposition 82 Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et soit γ un lacet homotope à un point dans Ω et qui évite les pôles et les zéros de f . Alors $(\omega_{z'}(f) \text{Ind}_{z'}(\gamma))_{z' \in \Omega}$ est sommable et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z' \in \Omega} \omega_{z'}(f) \text{Ind}_{z'}(\gamma) \in \mathbf{Z}.$$

Preuve En effet les pôles de la dérivée logarithmique de f sont les zéros et les pôles de f et si z' est un pôle ou un zéro de f alors $\text{Res}_{z'}(\frac{f'}{f}) = \omega_{z'}(f)$.

•

Proposition 83 Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et soit γ un lacet homotope à un point dans Ω et qui évite les pôles et les zéros de f . Le nombre $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est l'indice du lacet $f \circ \gamma$ par rapport à l'origine.

Preuve Si γ est C^1 par morceaux c'est la formule du changement de variable. Sinon on se ramène à ce cas de la façon suivante. Si $n \in \mathbf{N}$ on considère l'arc polygonal $\gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ qui coïncide avec γ si $t = k/(n+1), k \in \{0, n+1\}$ et qui est affine sur chaque intervalle $[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}]$. Puis on considère l'homotopie Γ_n entre γ et γ_n , Γ_n définie par $\Gamma_n(s, t) = s\gamma_n(t) + (1-s)\gamma(t)$. L'uniforme continuité de γ et la compacité de $\gamma([a, b])$ garantissent que si n est grand l'homotopie Γ_n est définie dans Ω et hors des pôles et des zéros de f . Ainsi d'une part $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma_n$ sont

homotopes dans \mathbf{C}^* et donc $\text{Ind}_0(f \circ \gamma) = \text{Ind}_0(f \circ \gamma_n)$. D'autre part $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.
On est donc ramené au cas C^1 par morceaux.

•

Proposition 84 Soit $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $i = 1, 2$ deux lacets de \mathbf{C}^* . Alors $\text{Ind}_0(\gamma_1 \gamma_2) = \text{Ind}_0(\gamma_1) + \text{Ind}_0(\gamma_2)$.

Preuve Si γ_1 et γ_2 sont C^1 par morceaux c'est la formule du changement de variable et l'identité $\frac{(\gamma_1 \gamma_2)'}{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2'}{\gamma_2}$. Si les arcs sont continus on les homotope dans \mathbf{C}^* à des arcs C^1 par morceaux comme précédemment.

Corollaire (théorème des multiplicités) Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et soit $U \subset \Omega$ bordé par $J^+ \subset \Omega$ courbe de Jordan paramétrée par l'abscisse curviligne, positivement orientée. On suppose que J^+ évite les zéros et les pôles de f . Alors la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de f dans U comptés avec multiplicité est égale à $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Preuve En effet dans ce cas $\text{Ind}_{z'}(J^+) = 1$ si $z' \in U$ et $\text{Ind}_{z'}(J^+) = 0$ sinon.

•

Dans la pratique on utilise la théorème de Rouché pour compter les zéros.

Proposition 85 (théorème de Rouché) Soit $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et soit $U \subset \Omega$ bordé par $J^+ \subset \Omega$ courbe de Jordan C^1 paramétrée par l'abscisse curviligne, positivement orientée. On suppose que si $z \in J^+$ alors $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans U comptés avec multiplicité.

Preuve Si $t \in [0, 1]$ on pose $f_t = f + t(g - f)$. L'hypothèse $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ sur J^+ implique que f_t ne s'annule pas sur J^+ . On pose $n(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz$. La fonction $t \rightarrow n(t)$ est continue sur $[0, 1]$ et à valeurs entières. Elle est donc constante. On conclut en remarquant que $f_0 = 0$, $f_1 = g$ et que $n(t)$ est le nombre de zéros de f_t dans U comptés avec multiplicité.

•

Remarques 40 Le théorème de D'Alembert se déduit du résultat de Rouché. Soit $P = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ un polynôme de degré n . Il existe $R > 0$ tel que si $|z| \geq R$ alors $|a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1}| < |z|^n$ (prendre par exemple $R = 1 + \max |a_i|$). D'après Rouché P et z^n ont n zéros dans le disque D_R comptés avec multiplicités. Vérifiez qu'on n'utilise pas ici un résultat qui repose sur une précédente preuve de D'Alembert !

Le théorème de l'image ouverte ainsi que le théorème d'inversion locale peuvent être vus comme des corollaires de Rouché. En effet si f analytique non constante au voisinage de z_0 alors pour tout r petit il existe $\eta > 0$ petit tel que $|f(z) - f(z_0)| > \eta$ sur $S_r(z_0)$. D'après Rouché appliqué à $f - f(z_0)$ et $f - v$ où $v \in D_\eta(f(z_0))$, il existe $z \in D_r(z_0)$ tel que $f(z) = v$. Donc $D_\eta(f(z_0)) \subset f(D_r(z_0))$ et f est ouverte. De plus, si $f'(z_0) \neq 0$, Rouché assure que v a un unique antécédent dans $D_r(z_0)$. L'inverse local de f existe donc et il est continu. En inversant le taux d'accroissement on constate que cet inverse est holomorphe.

XI Calcul de quelques intégrales

Combinée aux lemmes suivant la formule des résidus permet le calcul de certaines intégrales.

Proposition 86 (Lemme de Jordan)

1) Soit f analytique sur $\Omega = \{z = \rho \exp(i\theta) : \alpha < \theta < \beta, 0 < \rho < \varepsilon\}$. On suppose qu'il existe g analytique au voisinage de l'origine et $a \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = \frac{a}{z} + g(z)$ sur Ω . Alors $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha)a$ avec $\gamma_\rho(t) = \rho \exp(it)$ si $t \in]\alpha, \beta[$.

2) a) Soit f analytique sur $\Omega = \{z = \rho \exp(i\theta) : \alpha < \theta < \beta, 0 < \rho < \varepsilon\}$ et telle que $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$. Alors $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 0$ avec $\gamma_\rho(t) = \rho \exp(it)$ si $t \in]\alpha, \beta[$.

b) Soit f analytique sur $\Omega = \{z = \rho \exp(i\theta) : \alpha < \theta < \beta, R < \rho\}$ et telle que $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Alors $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 0$ avec $\gamma_\rho(t) = \rho \exp(it)$ si $t \in]\alpha, \beta[$.

3) Soit f analytique sur $\Omega = \{R < |z|, 0 < \text{Im } z\}$ et telle que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Alors si $\alpha > 0$, $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_\rho} \exp(i\alpha z) f(z) dz = 0$ avec $\gamma_\rho(t) = \rho \exp(it)$ si $t \in]0, \pi[$.

Preuve Seul le point 3) est délicat. On pose $M_\rho = \sup_{z \in \Omega, |z|=\rho} |f(z)|$ si $R < \rho$. On a

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \exp(i\alpha z) f(z) dz \right| \leq 2M_\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\alpha \rho \sin \theta) \rho d\theta.$$

On observe que $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta$ si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (concavité de \sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). Il vient alors

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \exp(i\alpha z) f(z) dz \right| \leq 2M_\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\alpha \rho \frac{2\theta}{\pi}) \rho d\theta \leq \frac{\pi}{\alpha} M_\rho (1 - \exp(-\alpha \rho)) \leq \frac{\pi}{\alpha} M_\rho.$$

Nous ne rentrerons pas dans la théorie. Nous indiquerons simplement quelques exemples qui illustrent la puissance de la méthode.

Exemples 24 On peut obtenir, en choisissant astucieusement les contours d'intégration :

- Si $a > 1$ alors $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ (formule des résidus appliquée à la fonction $\frac{2}{z^2 + iaz - 1}$)

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (formule des résidus et deuxième point b) du lemme)

- Si $b > 0$ alors $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2 + b^2} dt = \frac{\pi \exp(-b)}{2b}$ (formule des résidus appliquée à la fonction $\frac{\exp(iz)}{z^2 + b^2}$ et troisième point du lemme)

- Si $1 < \alpha < 2$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}}$ (formule des résidus, deuxième point a) et troisième point du lemme)

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

(formule des résidus appliquée à la fonction $\frac{\exp(iz)}{z}$, premier et troisième points du lemme)

- $\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(1+t)^2} dt = 0$

(formule des résidus appliquée à la fonction $\frac{(\log t)^2}{(1+t)^2}$, premier point et deuxième point b) du lemme)

XII Séries de Laurent

Définition 37 Une *série de Laurent* est la somme S d'une série entière et d'une série entière en $\frac{1}{z}$:

$$S(z) = A(z) + B\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$$

avec $c_n = a_n$ si $n > 0$, $c_0 = a_0 + b_0$ et $c_n = b_{-n}$ si $n < 0$.

Propriétés Soit C_r^R la couronne $C_r^R = \{r < |z| < R\}$ où R est le rayon de A et r l'inverse du rayon de B . La famille $(c_n z^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable si $z \in C_r^R$. Sa somme définit une fonction analytique S appelée somme de S . Si $z \in C_r^R$, $S(z) = A(z) + B(\frac{1}{z})$ où A et B sont les sommes de A et B .

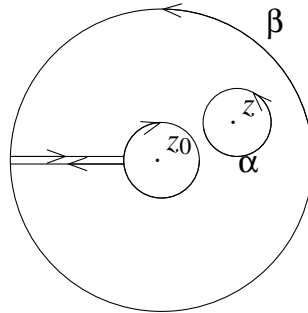
Définition 38 Une fonction $f \in O(\Omega)$ est dite *développable en série de Laurent sur la couronne* $C_r^R(z_0) = \{r < |z - z_0| < R\} \subset \Omega$ si $z \mapsto f(z_0 + z)$ coïncide avec la somme d'une série de Laurent sur C_r^R .

Proposition 87 Soit $f \in O(C_r^R(z_0))$ et $s < t \in]r, R[$. Alors

$$f(z)^{(k)} = \frac{k!}{2i\pi} \left(\int_{S_t(z_0)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta - \int_{S_s(z_0)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right)$$

si $z \in C_s^t(z_0)$ et $k \in \mathbf{N}$.

Preuve Soit $z \in C_s^t(z_0)$. Soit $\alpha(t) = z + \varepsilon \exp(2i\pi t)$ (avec $\varepsilon > 0$ petit). Ce lacet est homotope dans $C_r^R(z_0)$ au lacet β formé à partir des cercles $S_t(z_0)$ (parcouru positivement), $S_s(z_0)$ (parcouru négativement) et d'un segment reliant les deux cercles, évitant z et parcouru dans un sens puis dans l'autre (voir dessin).



La proposition découle immédiatement de la formule de Cauchy et de l'invariance par homotopie de l'intégrale d'une forme localement exacte.

•

On déduit de cette proposition et de la formule intégrale fondamentale le résultat suivant.

Proposition 88 Si $f \in O(\Omega)$ alors f est développable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans Ω .

Remarque 41 Si $\Omega = D_r \setminus \{0\}$ alors $f \in O(\Omega)$ est donc la somme d'une série entière $A(z)$ de rayon au moins r et d'une série entière $B(\frac{1}{z})$ en $\frac{1}{z}$ de rayon infini. En d'autres termes, si $f \in O(D_r \setminus \{0\})$ alors f est développable en série de Laurent sur ce disque épointé. Le coefficient f_{-1} s'appelle le *résidu* de f en 0 et il vérifie $f_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_s} f(z) dz$ si $s \in]0, r[$ et $\gamma_s(t) = s \exp(it)$.

La proposition suivante résulte du théorème de Weierstrass sur les singularités isolées.

Proposition 89 Soit $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n z^n$ une fonction analytique sur $D_r \setminus 0$. L'origine n'est pas une singularité essentielle si et seulement si la suite $f_{-n}, n \in \mathbf{N}$ est nulle à partir d'un certain rang.

XIII Convergence

Théorème 25 (Weierstrass) Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions analytiques sur Ω et soit f une fonction définie sur Ω . On suppose que pour tout compact K de Ω la suite des restrictions des f_n à K converge uniformément vers la restriction de f à K . Alors f est analytique et pour tout $k \in \mathbf{N}$ la suite des dérivées kèmes des f_n converge uniformément sur tout compact vers la dérivée kème de f .

Preuve Soit K un compact de Ω . Il est recouvert par un nombre fini de disques ouverts dont la fermeture est contenue dans Ω . Il suffit donc de prouver l'énoncé pour un disque $D_r(z_0)$ tel que $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ au lieu de K . Il existe $R > r$ tel que $\overline{D_R(z_0)} \subset \Omega$. D'après la formule de Cauchy on a

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S_R(z_0)^+} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

si $z \in D_R(z_0)$, $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$. D'après un corollaire à la formule intégrale fondamentale, puisque les restrictions des f_n à $S_R(z_0)$ tendent uniformément vers la restriction de f à $S_R(z_0)$, la suite f_n tend uniformément sur $\overline{D_r(z_0)} \subset D_R(z_0)$ vers $F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S_R(z_0)^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$ qui est analytique et la suite $f_n^{(k)}$ tend uniformément sur $\overline{D_r(z_0)} \subset D_R(z_0)$ vers $F^{(k)}$. Par conséquent f coïncide avec F sur $D_r(z_0)$, elle est analytique et la suite des dérivées kèmes des f_n converge uniformément sur $D_r(z_0)$ vers la dérivée kème de f .

•

Remarque 42 On peut prouver l'analyticité de f en remarquant que l'intégrale de $f dz$ est nulle sur le bord de tout rectangle inclus dans Ω et conclure à l'aide du théorème de Morera.

Corollaire Soit Ω ouvert connexe de \mathbf{C} et soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suites de fonctions injectives et analytiques définies sur Ω et qui convergent uniformément vers $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors f est constante ou injective.

Preuve On raisonne par contraposée en supposant que f est non constante et qu'il existe $v \in \mathbf{C}$ et $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ tels que $f(z_1) = f(z_2) = v$. Puisque f est analytique non constante, il existe $R > 0$ tel que d'une part $\overline{D_R(z_1)} \cap \overline{D_R(z_2)} = \emptyset$, d'autre part si $i = 1, 2$, $\overline{D_R(z_i)} \subset \Omega$ et $f^{-1}(v) \cap \overline{D_R(z_i)} = \{z_i\}$. Soit $\eta = \min_{S_R(z_1) \cup S_R(z_2)} |f(z) - v|$. On a $\eta > 0$. L'hypothèse de convergence uniforme implique qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $\max_{S_R(z_1) \cup S_R(z_2)} |f(z) - f_n(z)| < \eta$. D'après Rouché il existe $z_{i,n} \in D_R(z_i)$ tel que $f_n(z_{1,n}) = f_n(z_{2,n}) = v$ si $n \geq n_0$ et donc f_n n'est pas injective.

•

Proposition 90 (extraction diagonale de Cantor) Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de réels positifs et soit $(a_{n,i})_{(n,i) \in \mathbf{N} \times I} = ((a_{n,i})_{n \in \mathbf{N}})_{i \in I}$ une famille indéxée par I de suites de complexes. On suppose que si $n \in \mathbf{N}$ et $i \in I$ alors $|a_{n,i}| \leq M_i$. Alors il existe $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de complexes telles que pour tout $i \in I$ la suite $(a_{\phi(n),i})_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers a_i . En particulier $|a_i| \leq M_i$.

Preuve Puisque I est dénombrable on peut supposer $I = \mathbf{N}$. Montrons par récurrence sur $i \in \mathbf{N}$ qu'il existe $\phi_i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ injective et a_i tels que $\phi_{i+1}(k) = \phi_i(k)$ si $k = 0, \dots, i$, $(a_{\phi_i(n),i})_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers a_i et $|a_i| \leq M_i$.

Par hypothèse la suite $(a_{n,0})_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée par M_0 . Il existe donc $\phi_0 : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ injective et a_0 tels que $(a_{\phi_0(n),0})_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers a_0 et $|a_0| \leq M_0$. Soit $i \in \mathbf{N}$. On suppose avoir trouvé $\phi_i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ et a_i . Puisque la suite $(a_{\phi_i(n),i+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée par M_{i+1} il existe $\psi_{i+1} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ injective et a_{i+1} tels

que $\psi_{i+1}(k) = k$ si $k = 0, \dots, i$, $(a_{\phi_i(\psi_{i+1}(n)), i+1})_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers a_{i+1} et $|a_{i+1}| \leq M_{i+1}$. La fonction $\phi_{i+1} = \phi_i \circ \psi_{i+1}$ convient.

Si $i \in \mathbf{N}$ on pose $\phi(i) = \phi_i(i)$. Par construction, la suite $(a_{\phi(n), i})_{n \in \mathbf{N}}$ qui est une suite extraite de la suite $(a_{\phi_i(n), i})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers a_i .

•

Définition 39 Une famille $(f_j)_{j \in J}$ de fonctions analytiques sur un ouvert Ω de \mathbf{C} est dite *normale* si elle est finie ou s'il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\phi : \mathbf{N} \rightarrow J$ injective tels que $(f_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ tend uniformément sur tout compact vers f .

Théorème 26 (Ascoli-Montel) Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille infinie de fonctions analytiques sur un ouvert Ω . On suppose pour tout compact K de Ω il existe $M_K \in \mathbf{R}$ qui majore les restrictions des $f_j, j \in J$ à K . Alors $(f_j)_{j \in J}$ est normale.

Preuve On peut supposer $J = \mathbf{N}$. Il existe $z_k \in \Omega, r_k > 0, k \in \mathbf{N}$ tels $D_{r_k}(z_k) \subset \overline{D_{2r_k}} \subset \Omega$ si $k \in \mathbf{N}$ et la réunion des disques $D_{r_k}(z_k), k \in \mathbf{N}$ recouvre Ω . Si $k \in \mathbf{N}$ on note M_k un majorant des restrictions des $f_n, n \in \mathbf{N}$ à $\overline{D_{2r_k}(z_k)}$. D'après les estimations de Cauchy si l, k et $n \in \mathbf{N}$, alors $|f_n^{(l)}(z_k)| \leq M_k \frac{l!}{(2r_k)^l}$. Si $n, l, k \in \mathbf{N}^3$ on pose $a_{n,k}^l = \frac{f_n^{(l)}(z_k)}{l!}$. On a $|a_{n,k}^l| \leq M_k \frac{1}{(2r_k)^l}$. Appliquons la proposition d'extraction diagonale de Cantor à la famille $(a_{n,k}^l)_{n,l,k \in \mathbf{N}^3}$ en posant $\mathbf{N}^2 = I$. On obtient $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et des complexes $F_k^l, l, k \in \mathbf{N}$ tels que $F_k^l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\phi(n), k}^l$ et $|F_k^l| \leq M_k \frac{1}{(2r_k)^l}$.

Fixons $k \in \mathbf{N}$. La série $\sum_{l \in \mathbf{N}} F_k^l z^l$ a un rayon au moins égal à $2r_k$. On note \mathbf{F}_k la fonction analytique sur $D_{r_k}(z_k)$ définie par $\mathbf{F}_k(z) = \sum_{l \in \mathbf{N}} F_k^l (z - z_k)^l$.

Montrons que $(f_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $D_{r_k}(z_k)$ vers \mathbf{F}_k . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $L \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{l > L} M_k \frac{1}{2^l} < \varepsilon/3$. Il existe alors $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\sum_{l=0}^L |F_k^l - a_{\phi(n), k}^l| r_k^l < \varepsilon/3$. Or si $z \in D_{r_k}(z_k)$ alors $\mathbf{F}_k(z) - f_{\phi(n)}(z)$ est égal à

$$\sum_{l=0}^L (F_k^l - a_{\phi(n), k}^l) (z - z_k)^l + \sum_{l > L} F_k^l (z - z_k)^l - \sum_{l > L} a_{\phi(n), k}^l (z - z_k)^l$$

et par choix de L et N chacun des trois termes de la somme de droite est majoré par $\varepsilon/3$. Par conséquent $|\mathbf{F}_k(z) - f_{\phi(n)}(z)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Ceci prouve la convergence uniforme de $(f_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ vers \mathbf{F}_k sur $D_{r_k}(z_k)$.

De plus si $k, h \in \mathbf{N}$ et $z \in D_{r_k}(z_k) \cap D_{r_h}(z_h)$ alors $\mathbf{F}_k(z)$ et $\mathbf{F}_h(z)$ sont égaux à la limite de la suite $(f_{\phi(n)}(z))_{n \in \mathbf{N}}$. Par conséquent les \mathbf{F}_k se recollent et définissent une fonction analytique $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui est limite uniforme sur tout compact de la suite $(f_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$.

•

XIV Représentation conforme de Riemann

La simple connexité est une propriété invariante par homéomorphisme. En particulier un ouvert homéomorphe au disque est simplement connexe. On sait aussi (Liouville) qu'il n'y a pas de bijection analytique entre \mathbf{C} et le disque D_1 . Puisque les fonctions holomorphes sont les applications conformes du plan (elles respectent les angles orientés), le théorème de représentation

conforme (dont l'énoncé va suivre) assure que tout ouvert du plan homéomorphe au disque et différent du plan peut être cartographié globalement par une carte circulaire (ou rectangulaire c'est plus pratique) et qui respecte les angles. Puisque les projections stéréographiques conservent les angles sphériques, ceci est encore vrai pour un ouvert de la sphère homéomorphe au disque, différent de la sphère ou de la sphère épointée.

Théorème 27 (de la représentation conforme de Riemann) Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ est un ouvert non vide, connexe, simplement connexe et différent de \mathbf{C} . Alors il existe $f : \Omega \rightarrow D_1$ analytique et bijective.

On aura besoin d'un lemme conforme.

Lemme 2 Soit U un ouvert connexe et simplement connexe connexe de D_1 , différent de D_1 et contenant l'origine. Alors il existe $g : U \rightarrow D_1$ analytique injective telle que $g(0) = 0$ et $|g'(0)| > 1$.

Preuve Soit $\beta \in D_1 \setminus \{0\}$ tel que $\beta^2 \notin U$. L'homographie $g_1 = \frac{\beta^2 - z}{1 - \beta^2 z}$ envoie injectivement U sur un ouvert simplement connexe U_1 de D_1^* . De plus $\beta^2 = g_1(0) \in U_1$. Il existe donc une détermination g_2 de la racine carrée définie sur U_1 et telle que $g_2(\beta^2) = \beta$. L'ouvert $U_2 = g_2(U_1)$ est dans D_1 . Soit g_3 l'homographie $g_3 = \frac{\beta - z}{1 - \beta z}$. On note g la composée $g_3 \circ g_2 \circ g_1$. Par construction $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \frac{1+|\beta|^2}{2|\beta|} > 1$, $g(U) \subset D_1$ et g est injective.

•

Preuve (du théorème) Soit $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \Omega$. Puisque Ω est simplement connexe, il existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $g^2(z) = z - z_0$: la fonction g est une racine carrée. Si on pose $\Omega_1 = g(\Omega)$ alors $\Omega_1 \subset \mathbf{C}^*$, $\Omega_1 \cap -\Omega_1 = \emptyset$ et l'application $g : \Omega \rightarrow \Omega_1$ est un homéomorphisme analytique ainsi que sa réciproque. De plus Ω_1 est simplement connexe.

Soit $v_0 \in \Omega$ et $v_1 = g(v_0) : v_1 \neq 0$ par construction. Puisque g est ouverte il existe $\varepsilon \in]0, |v_1|$ tel que $D_\varepsilon(v_1) \subset \Omega_1$. On a $D_\varepsilon(-v_1) \cap \Omega_1 = \emptyset$. Or l'homographie $\frac{\varepsilon(v_1 - z)}{3v_1(z + v_1)}$ injecte $\mathbf{C} \setminus D_\varepsilon(-v_1)$ dans D_1 en envoyant v_1 sur 0. Par conséquent la composée $h_0 = \frac{\varepsilon(v_1 - z)}{3v_1(z + v_1)} \circ g$ est une injection analytique de Ω dans D_1 qui envoie v_0 sur l'origine.

Notons \mathcal{H} l'ensemble des injections analytiques de Ω dans D_1 qui envoient v_0 sur l'origine. Cet ensemble contient h_0 . D'après le lemme précédent si $h \in \mathcal{H}$ est non surjective il existe $\tilde{h} \in \mathcal{H}$ telle que $|\tilde{h}'(v_0)| > |h'(v_0)|$. On pose $M = \sup_{h \in \mathcal{H}} |h'(v_0)|$. On a $M \neq 0$ car $|h_0'(v_0)| \neq 0$. Si on trouve $h \in \mathcal{H}$ telle que $|h'(v_0)| = M$ alors h est une bijection analytique de Ω dans D_1 . Il reste donc à montrer l'existence d'un tel h .

On considère une suite $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de \mathcal{H} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |h_n'(v_0)| = M$. Puisque les fonctions h_n sont à valeurs dans D_1 , elles sont bornées dans leur ensemble et forment une famille normale (Montel). On peut donc en extraire une suite convergente (uniformément sur tout compact de Ω ainsi que les dérivées) vers une fonction analytique h . On a $|h'(v_0)| = M$ et donc h est non constante. Puisque les h_n sont injectives c'est encore vrai pour h . Ainsi $h \in \mathcal{H}$. Puisque $|h'(v_0)| = M$ l'application h répond au problème.

•

Le cas linéaire Si $A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est une application linéaire alors A s'écrit de façon unique sous la forme $A = S^+ + S^-$ où $S^+ = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est une similitude directe (composée d'une homothétie et d'une rotation) et $S^- = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}$ est une similitude indirecte (composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale). On a $\alpha = \frac{a+d}{2}, \beta = \frac{b-c}{2}, \delta = \frac{b+c}{2}, \gamma = \frac{a-d}{2}$, ou $a = \alpha + \gamma, b = \beta + \delta, c = \delta - \beta, d = \alpha - \gamma$.

Si on pose $z = x + iy, \lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \gamma + i\delta$ et qu'on identifie \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} l'application A s'écrit $z \mapsto \lambda z + \mu \bar{z}$. Ainsi A est \mathbf{C} -linéaire si et seulement si $\mu = 0$ c'est à dire si et seulement si A est une similitude directe ou encore si et seulement si A préserve les angles orientés. Une telle application est dite *conforme*.

La cas général On identifie toujours \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} . Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2, z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$ de différentielle égale à A . Il existe $\varepsilon : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ continue et nulle à l'origine telle que $f(z_0 + z) = f(z_0) + A \cdot (x, y) + |z|^2 \varepsilon(z)$ avec $z = x + iy$. On pose $f = (\mathcal{R}e f, Im f)$ ou encore $f = \mathcal{R}e f + i Im f$. On a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}e f & \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{R}e f \\ \frac{\partial}{\partial x} Im f & \frac{\partial}{\partial y} Im f \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}e f + \frac{\partial}{\partial y} Im f) + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} Im f - \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{R}e f)i \\ \mu = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}e f - \frac{\partial}{\partial y} Im f) + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} Im f + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{R}e f)i \end{cases}$$

on obtient $f(z_0 + z) = f(z_0) + \lambda z + \mu \bar{z} + |z|^2 \varepsilon(z)$. Par conséquent f est \mathbf{C} -dérivable en z_0 si et seulement si $\mu = 0$ c'est à dire $df(z_0)$ est une similitude directe ou encore si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}e f - \frac{\partial}{\partial y} Im f = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Im f + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{R}e f = 0 \end{cases}$$

Ces équations aux dérivées partielles s'appellent les *équations de Cauchy-Riemann*.

On note $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ les opérateurs différentiels duaux de $(dz, d\bar{z})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) \end{cases}$$

On obtient $\lambda = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$ et $\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0)$ ou encore $df(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0) dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) d\bar{z}$.

Avec ce formalisme on a :

Proposition 91 L'application f est \mathbf{C} -dérivable en z_0 si et seulement si elle est différentiable et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) = 0$ c'est à dire $\frac{\partial}{\partial y} f(z_0) = i \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)$.

Plus généralement

Proposition 92 $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ différentiable est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ et alors $f' = \frac{\partial}{\partial z} f$ et $df = \frac{\partial}{\partial z} f dz$.

Remarque 43 Si f est holomorphe elle est conforme et elle est localement inversible là où sa dérivée est non nulle. Ainsi les niveaux $\mathcal{R}e f = cte$ et $Im f = cte$ sont orthogonaux et les images par f des lignes horizontales et verticales sont orthogonales.

Définition 40 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est de classe C^2 le laplacien de f est défini par $\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$.

Remarque 44 Il résulte du lemme de Schwarz sur la symétrie de la différentielle seconde que si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est de classe C^2 alors $\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) f = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) f$.

Cette identité implique

Proposition 93 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^2 est holomorphe alors $\Delta f = 0$.

L'objet du chapitre suivant est l'étude des solutions de l'équation $\Delta f = 0$.

XVI Fonctions harmoniques

Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} et $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 et qui vérifie $\Delta g = 0$. On pose $\omega_1 = \frac{\partial}{\partial x} g dx + \frac{\partial}{\partial y} g dy = dg$ et $\omega_2 = \frac{\partial}{\partial x} g dy - \frac{\partial}{\partial y} g dx$. La condition $\Delta g = 0$ assure que ω_2 est fermée donc localement exacte. En particulier si $z_0 \in \Omega$ et $D_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ alors il existe $h : D_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 tel que $\omega_2 = dh$. On pose $f(z) = g(z) + ih(z)$ si $z \in D_\varepsilon(z_0)$. Alors f vérifie les équations de Cauchy-Riemann et donc est holomorphe. Ceci établit :

Proposition 94 Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $\Delta g = 0$. Alors la restriction de g à tout disque inclus dans Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe définie sur ce disque (unique à constante près).

Corollaire Soit U et Ω des ouverts de \mathbf{C} , $f : U \rightarrow \Omega$ holomorphe et $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 et qui vérifie $\Delta g = 0$. Alors $G = g \circ f$ vérifie encore $\Delta G = 0$.

Preuve Il suffit de raisonner sur $\Re g$ et $\Im g$. Soit $a \in U$, $b = f(a)$ et $D_r(b) \subset \Omega$. Il existe G_1 et G_2 holomorphes sur $D_r(b)$ telles que $\Re G_1 = \Re g$ et $\Im G_1 = \Im g$. Les composées $G_i \circ f$ sont holomorphes. Leurs laplaciens sont nuls. Par passage aux parties réelles on obtient le résultat.

•

Notation 13 Soit $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbf{C}$ un arc C^1 par morceaux paramétré par l'abscisse curviligne et f continue sur $\gamma([0, L])$. On pose

$$\int_0^L f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_\gamma f(z) |dz|.$$

Définition 41 Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue définie sur un ouvert de \mathbf{C} . Elle est dite *harmonique* si elle vérifie la propriété de la moyenne : si $z_0 \in \Omega$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ et pour tout $r \in]0, \varepsilon[$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \exp(it)) r dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) |dz|,$$

c'est à dire $f(z_0)$ est la valeur moyenne de f sur tout petit cercle centré en z_0 .

Remarque 45 Une fonction est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Proposition 95 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe alors elle est harmonique et elle vérifie la propriété de la moyenne sur tout disque inclus de Ω : si $z_0 \in \Omega$ si $D_\varepsilon(z_0) \in \Omega$ alors pour tout $r \in]0, \varepsilon[$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \exp(it)) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) |dz|.$$

Preuve C'est juste une réécriture de la formule de Cauchy.

•

Corollaire Soit $f \in O(\Omega)$ sans zéro. Alors $\log |f|$ est harmonique.

Preuve En effet si $D_r(z_0) \in \Omega$ alors il existe $g \in O(D_r(z_0))$ tel que $\exp g = f$ sur $D_r(z_0)$. La partie réelle de g est harmonique et c'est la restriction à $D_r(z_0)$ de la fonction $\log |f|$.

•

Dans la suite l'homographie $h_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a = r_a \exp(it_a) \in D_1$ joue un rôle central. Dégageons maintenant les propriétés de h_a qui nous seront utiles. On sait déjà que h_a est un homéomorphisme analytique de la sphère de Riemann qui fixe globalement D_1 et S_1 . Deux petits calculs montrent que

$$h'_a(z) = \frac{1 - a\bar{a}}{(1 - \bar{a}z)^2} \text{ si } z \in \overline{D_1} \text{ et } |h'_a(\exp(it))| = \mathcal{R}e \frac{\exp(it) + a}{\exp(it) - a} \text{ si } t \in \mathbf{R}.$$

Définition 42 La fonction $\mathcal{R}e \frac{\exp(it) + a}{\exp(it) - a}$ s'appelle le noyau de Poisson.

A t fixé le noyau de Poisson $a \in D_1 \mapsto \mathcal{R}e \frac{\exp(it) + a}{\exp(it) - a}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe. C'est donc une fonction harmonique par rapport à $a \in D_1$.

Proposition 96 (formule de Poisson pour une fonction holomorphe) Soit $f : D_{1+\varepsilon} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et $a \in D_1$. Alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}e \frac{\exp(it) + a}{\exp(it) - a} f(\exp(it)) dt.$$

Preuve Quitte à diminuer ε , la fonction $f \circ h_a^{-1}$ est holomorphe donc harmonique sur $D_{1+\varepsilon}$. Il vient en utilisant la propriété de la moyenne et la formule du changement de variable :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ h_a^{-1}(\exp(it)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}e \frac{\exp(it') + a}{\exp(it') - a} f(\exp(it')) dt'$$

car en posant $\exp(it) = h_a(\exp(it'))$ on a $dt = |h'_a(t')| dt' = \mathcal{R}e \frac{\exp(it') + a}{\exp(it') - a} dt'$.

•

La proposition suivante quantifie la dégénérescence de la restriction de h_a à S_1 lorsque $a = r_a \exp(it_a)$ tend vers un point $\exp(i\theta)$ du cercle. Elle traduit le fait que h_a^{-1} "concentre" toute partie compacte de $S_1 \setminus -\exp(i\theta)$ sur le point $\exp(i\theta)$ lorsque a tend vers par $\exp(i\theta)$.

Proposition 97 Soit $a = r_a \exp(it_a) \in D_1$, $\exp(i\theta) \in S_1$. On a $h_a(\exp(it_a)) = \exp(it_a)$. Soit θ fixé et $\eta \in]0, \pi[$. On suppose $|t_a - \theta| < \eta$. Il existe $\alpha(a, \theta) < \beta(a, \theta)$ tels que h_a réalise un homéomorphisme entre $\{\exp(is) : s \in [\theta - \eta, \theta + \eta]\}$ et $\{\exp(is) : s \in [\alpha(a, \theta), \beta(a, \theta)]\}$ et $\lim_{a \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} \alpha(a, \theta) = \theta - \pi$ et $\lim_{a \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} \beta(a, \theta) = \theta + \pi$.

Preuve L'égalité $h_a(\exp(it_a)) = \exp(it_a)$ est immédiate. La restriction de h_a à S_1 est un homéomorphisme de S_1 qui respecte l'orientation. L'image de $\{\exp(is) : s \in [\theta - \eta, \theta + \eta]\}$ par h_a est donc de la forme $\{\exp(is) : s \in [\alpha(a, \theta), \beta(a, \theta)]\}$ et contient $\exp(it_a)$. Il suffit de remarquer que

$$\lim_{a \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} h_a(\exp it) = -\exp(i\theta) \text{ si } t \neq \theta$$

pour conclure que $\lim_{a \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} \alpha(a, \theta) = \theta - \pi$ et $\lim_{a \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} \beta(a, \theta) = \theta + \pi$.

•

Nous sommes maintenant en mesure de prouver :

Théorème 28 Soit $g : S_1 \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Alors

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(it) + z}{\exp(it) - z} g(\exp(it)) dt$$

est holomorphe sur D_1 et $\lim_{z \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} \Re e G(z) = g(\exp(i\theta))$ pour tout θ .

Corollaire Soit $f : S_r \rightarrow \mathbf{C}$ continue. Alors

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \frac{r \exp(it) + z}{r \exp(it) - z} f(r \exp(it)) dt$$

est harmonique sur D_r se prolonge continument à S_r en posant $F(r \exp(i\theta)) = f(r \exp(i\theta))$ si $\theta \in \mathbf{R}$.

Preuve du corollaire Par l'homothétie $z \mapsto rz$ on se ramène au cercle S_1 et on applique le théorème précédent à la partie réelle et à la partie imaginaire de f .

•

Preuve du théorème L'analyticité de G est obtenue en écrivant $\frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z} = \frac{2\exp(it)}{\exp(it)-z} - 1$ et appliquant la formule intégrale fondamentale à $g(\exp(it))$.

Soit $M = \sup_{S_1} |g|$. Fixons $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varepsilon > 0$. Puisque g est continue il existe $\eta > 0$ tel que

$$(*) |g(\exp(it)) - g(\exp(i\theta))| < \varepsilon \text{ si } |t - \theta| < \eta.$$

D'après la proposition précédente dont on reprend les notations il existe $\delta > 0$ tel que si $a \in D_1$ et $|a - \exp(i\theta)| < \delta$ alors

$$(**) |\theta - \pi - \alpha_a| + |\theta + \pi - \beta_a| < \frac{\pi}{M} \varepsilon.$$

On pose $g_a(t') = (g(h_a^{-1}(\exp(it')))) - g(\exp(i\theta))$. Puisque $\Re e \frac{\exp(it)+a}{\exp(it)-a} = |h'_a(\exp(it))|$ on a

$$\begin{aligned} \Re e G(a) - g(\exp(i\theta)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h'_a(\exp(it))| (g(\exp(it)) - g(\exp(i\theta))) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_a(t') dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\alpha_a}^{\beta_a} g_a(t') dt' + \int_{\beta_a}^{\alpha_a+2\pi} g_a(t') dt' \right] \end{aligned}$$

D'après la proposition qui précède, (*) et (**) on a $|g_a(\exp(it'))| < \varepsilon$ si $\alpha_a \leq t' \leq \beta_a$, $|g_a(\exp(it'))| < 2M$ si $\beta_a \leq t' \leq \alpha_a + 2\pi$ et enfin $0 < \alpha_a + 2\pi - \beta_a < \frac{\pi}{M}\varepsilon$. Ainsi pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|\Re e G(a) - g(\exp(i\theta))| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ si $|a - \exp(i\theta)| < \delta$ et $a \in D_1$. Ceci prouve que $\lim_{z \in D_1 \rightarrow \exp(i\theta)} \Re e G(z) = g(\exp(i\theta))$.

•

Proposition 98 (principe du maximum) Soit Ω ouvert connexe et relativement compact de \mathbf{C} , $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ continue et harmonique sur Ω . Alors il existe $z_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ tel que $f(z_0) \geq f(z)$ pour tout $z \in \Omega$. De plus s'il existe $z_1 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = f(z_1)$ alors f est constante.

Preuve Puisque $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ continue elle atteint son maximum noté M . Puisque que Ω est connexe il suffit de montrer que $E = \Omega \cap f^{-1}(M)$ est fermé et ouvert dans Ω . C'est un fermé de Ω car f est continue. Si $z_1 \in E$ alors d'après la propriété de la moyenne il existe $D_\varepsilon(z_1) \in \Omega$ telle que

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_1|=r} f(z)|dz|$$

et donc

$$0 = \int_{|z-z_1|=r} (f(z) - f(z_1))|dz| \leq 0$$

si $r \in]0, \varepsilon[$. Puisque $f(z) - f(z_1)$ est négative ou nulle et continue sur $S_r(z_1)$ ce n'est possible que si $f(z) = f(z_1)$ sur $S_r(z_1)$ pour tout $r \in]0, \varepsilon[$. Ainsi E est ouvert.

•

Problème de Dirichlet Soit Ω ouvert connexe et relativement compact de \mathbf{C} et $g : \overline{\Omega} \setminus \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ continue. Résoudre le *problème de Dirichlet* c'est trouver $G : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{C}$ continue, harmonique sur Ω et qui prolonge g .

D'après le principe du maximum, étant donné (Ω, g) il existe au plus une solution au problème de Dirichlet associé. Le théorème précédent a donc pour corollaire

Corollaire Soit $g : S_r \rightarrow \mathbf{C}$ continue. Alors le problème de Dirichlet associé à (D_r, g) possède une et une seule solution.

Preuve La fonction $G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \frac{r \exp(it) + z}{r \exp(it) - z} f(r \exp(it)) dt$ est une solution au problème de Dirichlet. L'unicité est donnée par le principe du Maximum.

•

Si on applique ces résultats aux fonctions harmoniques on obtient :

Proposition 99 (formule de Poisson) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ harmonique et $\overline{D_r(z_0)} \in \Omega$ et $|z| < r$. Alors

$$f(z_0 + z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \frac{r \exp(it) + z}{r \exp(it) - z} f(z_0 + r \exp(it)) dt.$$

Preuve La fonction définie par $F(z_0 + z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \frac{r \exp(it) + z}{r \exp(it) - z} f(z_0 + r \exp(it)) dt$ si $z_0 + z \in D_r(z_0)$ est harmonique et coïncide avec f sur $S_r(z_0)$. Elle est donc égale à f sur $D_r(z_0)$.

Proposition 100 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est continue et harmonique alors f est C^2 et $\Delta f = 0$.

Preuve On peut supposer f réelle. Soit $\overline{D_r(z_0)} \in \Omega$. D'après la formule de Poisson, la restriction de f à $D_r(z_0)$ est la partie réelle d'une fonction analytique définie sur le disque $D_r(z_0)$. Elle est donc de classe C^2 (même C^∞) et vérifie $\Delta f = 0$.

•