Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - Examen - septembre 2004 - 2 heures

Corrigé

I. 1. Si la restriction de f à $\mathbf{R}$ est constante alors l'origine est un zéro non isolé de la fonction entière $g = f - f(0)$. D'après le principe des zéros isolés, puisque $\mathbf{C}$ est connexe la fonction g est nulle et ceci implique que f est constante.
2. Si $k \in \{0, ..., d\}$ les fonctions $z \in \mathbf{C} \mapsto \cos(kz)$ et $z \in \mathbf{C} \mapsto \sin(kz)$ sont des fonctions entières. Or l'ensemble $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Par conséquent $P = \sum_{k=0}^{d}(A_k \cos(kz) + B_k \sin(kz))$ est une fonction entière dont la restriction à $\mathbf{R}$ est p.
3. Si $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, ..., d\}$ la $\mathbf{C}$-dérivée $(2n)$-ième de $z \mapsto \cos(kz)$ est $z \mapsto (-1)^n k^{2n} \cos(kz)$ et vaut $(-1)^n k^{2n}$ en $z = 0$ et la $\mathbf{C}$-dérivée $(2n)$-ième de $z \mapsto \sin(kz)$ est $z \mapsto (-1)^n k^{2n} \sin(kz)$ et vaut 0 en $z = 0$. La $\mathbf{C}$-dérivée $(2n+1)$-ième de $z \mapsto \cos(kz)$ est $z \mapsto (-1)^{n+1} k^{2n+1} \sin(kz)$ et vaut 0 en $z = 0$ et la $\mathbf{C}$-dérivée $(2n+1)$-ième de $z \mapsto \sin(kz)$ est $z \mapsto (-1)^n k^{2n+1} \cos(kz)$ et vaut $(-1)^n k^{2n+1}$ en $z = 0$. En sommant sur $k \in \{0, ..., d\}$ on obtient les formules voulues.
4. Si $A_d \neq 0$ alors $|P^{(2n)}(0)|$ est équivalent à $|A_d| d^{2n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} |P^{(2n)}(0)| = +\infty$.
Si $B_d \neq 0$ alors $|P^{(2n+1)}(0)|$ est équivalent à $|B_d| d^{2n+1}$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} |P^{(2n+1)}(0)| = +\infty$.
5. D'après 4. il existe $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tel que $P^N(0) \neq 0$. Or la $\mathbf{C}$-dérivée N-ième d'une fonction constante est nulle. Par conséquent P n'est pas constante et d'après 1. p n'est pas constante.

II. 1. D'après le principe du maximum, si $r \in]0, 1[$, $\sup_{|z| \le r} |f(z)| \le \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Or $\sup_{|z|=r} |f(z)| \le \sup_{r \le |z| \le 1} |f(z)|$. De plus, puisque f est continue sur $\overline{D}$, $\lim_{r \to 1} \sup_{r \le |z| \le 1} |f(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$ qui vaut 1 car $f \in \mathcal{F}$. Finalement on a $\sup_{|z| \le 1} |f(z)| \le 1$ et $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$.
2. Si $f \in \mathcal{F}$ n'a pas de zéro dans $\overline{D}$ alors $\frac{1}{f}$ est bien définie sur $\overline{D}$, continue sur $\overline{D}$ et analytique en restriction à D. De plus si $|z| = 1$ alors $|\frac{1}{f}(z)| = \frac{1}{|f(z)|} = 1$. Ainsi $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$. D'après 1. $|f(z)| \le 1$ et $|\frac{1}{f}(z)| \le 1$ si $z \in \overline{D}$. Ceci implique que $|f| = 1$ sur $\overline{D}$. Ainsi la restriction de f à D qui est connexe n'est pas ouverte. Par conséquent f est constante.
3. Soit z de module 1. Il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\exp(it) = z$. On a donc

$$|h_a(z)| = \left| \frac{\exp(it) - a}{1 - \overline{a} \exp(it)} \right| = \frac{|\exp(it) - a|}{|\exp(-it) - \overline{a}| \cdot |\exp(it)|} = \frac{|\exp(it) - a|}{|\overline{\exp(it)} - \overline{a}|} = 1.$$

4. Si $z \in \overline{D}$ alors $h_a(z) \in \overline{D}$ et donc $h_{-a}(h_a(z))$ est bien défini : on a

$$h_{-a}(h_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{1-\overline{a}z} + a}{1 + \overline{a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}} = \frac{(z-a) + (a - |a|^2 z)}{(1 - \overline{a}z) + (\overline{a}z - |a|^2)} = \frac{z(1 - |a|^2)}{(1 - |a|^2)} = z.$$

5. Puisque f est continue sur $\overline{D}$ et qu'elle ne s'annule pas sur $\{|z| = 0\}$, $f^{-1}(0)$ est un compact de D. Puisque $\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1$, la restriction de f à D est

une fonction analytique non nulle. Or D est connexe. D'après le principe des zéros isolés le compact $f^{-1}(0)$ est un ensemble de points isolés. Il est donc fini.
6. Puisque a est un zéro simple de la restriction de h_a à D et que c'est le seul zéro de h_a dans $\overline{D}$ on peut diviser f par h_a. Il existe une fonction g, continue sur $\overline{D}$, analytique en restriction à D et telle que $f = gh_a$. De plus $|f(z)| = |h_a(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Par conséquent $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Ainsi $g \in \mathcal{F}$.
7. Soit $(a_1, ..., a_n)$ les zéros de h_a répétés avec multiplicité : ceci a un sens car il sont dans D et la restriction de f à D est analytique. D'après 6. il existe $g \in \mathcal{F}$ telle que $f = g \prod_{i=1}^n h_{a_i}$. La fonction g n'a pas de zéro puisque les zéros de f répétés avec multiplicité sont les zéros de $\prod_{i=1}^n h_{a_i}$ répétés avec multplicité. D'après 2. g est constante : il existe δ de module 1 ($g \in \mathcal{F}$) telle que $g = \delta$.

III. 1. La restriction de f à $\{\mathcal{I}mz \geq 0\}$ est continue, sa restriction à $\{\mathcal{I}mz > 0\}$ est analytique et $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ donc d'après le lemme de réflexion de Schwarz il existe une unique fonction entière F qui vérifie $F(z) = f(z)$ et $\overline{F(\overline{z})} = f(z)$ si $z \in \{\mathcal{I}mz \geq 0\}$. D'après le principe du prolongement analytique $F(z) = f(z)$ sur U. Si $z \in U \setminus \{\mathcal{I}mz \geq 0\}$ alors $\overline{\overline{z}} = z$ et $\overline{z} \in \{\mathcal{I}mz \geq 0\}$. Par conséquent $\overline{f(z)} = \overline{F(z)} = f(\overline{z}) = F(\overline{z})$ ou encore, en conjugant, $f(z) = \overline{F(\overline{z})}$.
2. Puisque f est injective, elle est non constante et sa dérivée f' ne s'annule pas sur U. Or $F'(z) = f'(z)$ si $z \in U$. Par conséquent $F'(0) \neq 0$. De plus F qui prolonge f est non constante. Elle est donc ouverte car $\mathbf{C}$ est connexe.
3. Puisque F et U_0 sont ouverts, $W = f(U_0) = F(U_0)$ est ouvert.
Soit $w \in W$. Il existe $z \in U_0$ tel que $F(z) = f(z) = w$. Or $\overline{z} \in U_0$. Donc d'après 1. on a $\overline{w} = \overline{F(z)} = \overline{F(\overline{\overline{z}})} = f(\overline{z}) = F(\overline{z}) \in W$.
4. Soit $w \in W$. Puisque la restriction de F à U est f qui est injective et que $U_0 \subset U$, $F^{-1}(w) \cap U$ est un singleton inclus dans U_0. Il suffit donc de montrer que si $z \in F^{-1}(w)$ alors $z \in U$. On raisonne par l'absurde en considérant $z \notin U$ tel que $F(z) = w$. Alors $\overline{z} \in U$ et $F(\overline{z}) = f(\overline{z}) = \overline{F(\overline{\overline{z}})} = \overline{F(z)} = \overline{w} \in W$. D'après ce qui précède $\overline{z} \in U_0 = \{|\mathcal{I}mz| < 1\}$ et donc $z \in U_0 \subset U$. C'est la contradiction recherchée.
5. L'infini n'est pas une singularité essentielle de F : en effet $F(\mathbf{C} \setminus U_0)$ n'est pas dense car il est disjoint de l'ouvert non vide W d'après 4. Par conséquent F est un polynôme. D'après 4, l'origine est le seul zéro de F. C'est un zéro simple car $F'(0) \neq 0$. Par conséquent F est linéaire : $F = F'(0)z$.