Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Fonctions Holomorphes (HOLO) - Examen - mai 2004 - 2 heures

Corrigé

I. 1. L'origine est le seul pôle de $\frac{\exp(iz)}{z}$, le résidu de $\frac{\exp(iz)}{z}$ en 0 est 1 et l'indice de μ_ε en 0 est 1. Ainsi, d'après le théorème des résidus, $\int_{\mu_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz = 2i\pi$.

2. Puisque $\exp(iz) - 1 \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ et $\exp(i0) - 1 = 0$, il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ telle que $\frac{\exp(iz)}{z} - \frac{1}{z} = f$. Puisque f est entière c'est la somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la somme F de $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ appartient à $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ et $F' = f$. Ainsi $\int_{\gamma_\varepsilon} f dz = F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f dz = 0$. Or $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = i\pi$ et $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f dz$. Donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} dz = i\pi$.

3. On écrit $z = \frac{1}{\varepsilon}\exp(i\theta)$ $\theta \in]0, \pi[$. Il vient $|\exp(iz)| = \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta)$. De plus $dz = izd\theta$ et $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$. Par conséquent

$$|\int_{\alpha_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz| \leq \int_{\alpha_\varepsilon} |\frac{\exp(iz)}{z} dz| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta) d\theta.$$

Finalement, puisque $-\sin\theta \leq -\frac{2\theta}{\pi}$ si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|\int_{\alpha_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\frac{2\theta}{\varepsilon\pi}) d\theta \leq \varepsilon\pi(1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon})) \leq \varepsilon\pi$$

et donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz = 0$.

4. On a $\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt = [\frac{1-\cos t}{t}]_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$. Or $\lim_{\varepsilon\to 0} [\frac{1-\cos t}{t}]_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0$. De plus $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ existe et est finie car $\frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{-1}{2}$, $|\frac{1-\cos t}{t^2}| \leq \frac{2}{t^2}$ et $\frac{2}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Finalement $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt$ existe et vaut $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$.

5. Puisque $\frac{\sin t}{t}$ est paire et $\sin t = \mathcal{I}m \exp(it)$ si $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2}(\int_{\delta_\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{\beta_\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt) = \frac{1}{2}\mathcal{I}m(\int_{\delta_\varepsilon} \frac{\exp(it)}{t} dt + \int_{\beta_\varepsilon} \frac{\exp(it)}{t} dt).$$

Or

$$\frac{1}{2}(\int_{\delta_\varepsilon} \frac{\exp(it)}{t} dt + \int_{\beta_\varepsilon} \frac{\exp(it)}{t} dt) = \frac{1}{2}(\int_{\mu_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz - \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{\exp(iz)}{z} dz).$$

Ainsi, d'après 1, 2, 3 et 4, à la limite on obtient $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

II. 1. Si $n \in \mathbf{N}$ et $f^{(n)} = g_n \circ f$ alors $f^{(n+1)} = {g_n}'(f) f' = {g_n}'(f) g(f) = g_{n+1} \circ f$. Or $f^{(0)} = f = g_0 \circ f$. Ceci prouve par récurrence que si $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)} = g_n \circ f$.

2. S'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $f'(z) = 0$ alors pour $n > 0$, $f^{(n)}(z) = g_n(f(z)) = {g_{n-1}}'(f(z)) f'(z) = 0$. Ainsi $f(z') = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z' - z)^n = f(z)$ si $z' \in \mathbf{C}$ (f entière). Finalement f est constante dès qu'il existe $z \in \mathbf{C}$ tel que $f'(z) = 0$.

On suppose dorénavant $f(0) = f(1) = f(i)$.

3. Si $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = g_n(f(0)) = g_n(f(1)) = f^{(n)}(1) = g_n(f(i)) = f^{(n)}(i)$.

4. Puisque $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ (f entière) $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $f(z+1) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} z^n$ et $f(z+i) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(i)}{n!} z^n$ si $z \in \mathbf{C}$ et donc d'après 3, $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$.

5. Si $z \in \mathbf{C}$ on note n la partie entière de $\mathcal{R}ez$, m la partie entière de $\mathcal{I}mz$. Alors $z-(n+im) \in K = \{u+iv : (u,v) \in [0,1]^2\}$. Or d'après 4, f est 1-périodique et i-périodique. Donc $f(z) = f(z-(n+im))$ et $f(\mathbf{C}) = f(K)$ qui est borné car f continue et K compact. Ainsi f est bornée.

6. D'après un théorème de Liouville, f est constante car entière et bornée.

III. 1. Puisque Ω est connexe et f continue, $f(\Omega)$ est connexe. D'après le théorème de l'image ouverte, $f(\Omega)$ est ouvert car Ω est connexe et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est non constante (car $f_{|B}$ est injective et B n'est pas un singleton).

2. L'ensemble $\mathcal{O}(\Omega)$ est stable par dérivation, produit et si $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ sans zéro alors $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Ainsi, puisque $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est sans zéro dans Ω, $\frac{f'}{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Il existe $H_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\frac{f'}{f} = {H_0}'$ car Ω est simplement connexe. Alors $g = f\exp(-H_0) \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annule pas et $g' = (f' - f{H_0}')\exp(-H_0) = 0$. Il existe donc $\mu \in \mathbf{C}$ telle que $g = \exp\mu$ car Ω est connexe et $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$. Alors $H = \mu + H_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$, $H' = \frac{f'}{f}$ et $\exp H = f$.

3. Si $f'(z_0) = 0$, f restreinte à tout voisinage de z_0 n'est pas injective. Il existe donc $z \neq z' \in \mathbf{C}$ tels que $f(z) = f(z')$, $|\mathcal{I}mz - \mathcal{I}mz_0| < \pi$ et $|\mathcal{I}mz' - \mathcal{I}mz_0| < \pi$. Il existe alors $n, n' \in \mathbf{Z}$ tel que $z - 2i\pi n \in B$, $z' - 2i\pi n' \in B$, $z - 2i\pi n \neq z' - 2i\pi n'$, et $f(z-2i\pi n) = f(z) = f(z') = f(z'-2i\pi n')$. Ceci contredit l'hypothèse $f_{|B}$ injective et donc f' ne s'annule pas.
Puisque f est $2i\pi$-périodique et que $f_{|B}$ est injective, alors f' est $2i\pi$-périodique et si $f(z) = f(z')$ alors $z' = z + 2in\pi$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et donc $f'(z') = f'(z)$.

4. Soit $w \in f(\Omega)$ et $v, v' \in \Omega$ tels que $f(v) = f(v') = w$. D'après 3, $f'(v) = f'(v') \neq 0$. Ainsi $g(w) = \frac{1}{f'(v)} \in \mathbf{C}$ est indépendant du choix de $v \in f^{-1}(w)$ et g est bien définie sur $f(\Omega)$. Puisque $f'(v) \neq 0$, il existe un voisinage ouvert V de v tel que $f_{|V}$ admette un inverse analytique $f_{|V}^{-1}$ défini sur le voisinage ouvert $W = f(V)$ de w. Alors $g_{|W} = \frac{1}{f'} \circ f_{|V}^{-1} \in \mathcal{O}(W)$ et donc $g \in \mathcal{O}(f(\Omega))$.

5. Si $f(\Omega)$ est simplement connexe il existe $G_0 \in \mathcal{O}(f(\Omega))$ tel que ${G_0}' = g$. On a $(G_0 \circ f)' = ({G_0}' \circ f)f' = (g \circ f)f' = 1$ et donc $G_0 \circ f = z + cte$ car Ω connexe. On pose $G = G_0 + 1 - G_0(f(1))$. Alors $G \in \mathcal{O}(f(\Omega))$, $G' = g$ et $G \circ f = z$.

6. D'après 5, si $f(\Omega)$ est simplement connexe on trouve $G \in \mathcal{O}(f(\Omega))$ telle que $G \circ f = z$. Alors $G(f(1)) = 1$, $G(f(1+2i\pi)) = 1 + 2i\pi$ et donc $2i\pi = 0$ car f est $2i\pi$-périodique. Or $2i\pi \neq 0$. Ainsi $f(\Omega)$ n'est pas simplement connexe.

IV. 1. D'après le lemme de réflexion de Schwarz appliqué à f il existe $F \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ qui prolonge f et qui vérifie $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$. Puisque $f(\{\mathcal{I}mz \geq 0\}) \subset \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$ et $\{\overline{z} : \mathcal{R}ez \geq 0\} = \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$, on a $F(\mathbf{C}) \subset \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$.

2. Si $v \in \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$ alors $|1+v| \geq 1$ et $|\frac{1}{1+v}| \leq 1$. Puisque $F(\mathbf{C}) \subset \{\mathcal{R}ez \geq 0\}$ on a donc $|\frac{1}{1+F}| \leq 1$ (et non $|\frac{1}{1+F}| < 1$: contre exemple $f = F = 0$).

3. D'après 2 la fonction $G = \frac{1}{1+F}$ est une fonction entière et bornée. D'après un théorème de Liouville elle est constante. Ainsi $F = \frac{1}{G} - 1$ et f sont constantes.