Examen - 2nde session - 2heures

Les documents, ordinateurs, téléphones et calculatrices sont interdits.

I (6pts)

1 Définition d'une symétrie affine et d'une projection affine.

2 Énoncés des théorèmes de Desargues et Pappus.

3 Énoncé du théorème d'incidence.

4 Caractérisation barycentrique des applications affines.

II (3pts) Soit a,b,c trois points distincts et non alignés d'un plan affine et a' le milieu de b et c, b' le milieu de c et a, c' le milieu de a et b et g l'isobarycentre de a, b et c.

1 Montrer que les droites aa', bb' et cc' se coupent en g.

2 Montrer qu'il existe une unique application affine $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}(a) = b, \mathcal{A}(b) = c$ et $\mathcal{A}(c) = a$.

3 Calculer $\mathcal{A}(g)$.

III (11pts) On rappelle que si δ est une droite affine de $\mathbf{R}^2$, v un vecteur non nul qui ne dirige pas δ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors l'affinité de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport λ est l'application $\mathcal{A}$ telle que si $p \in \delta$ et $t \in \mathbf{R}$ alors $\mathcal{A}(p+tv) = p + \lambda tv$.

1 Soit $\mathcal{A}$ une affinité de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport $\lambda \neq 0$. Montrer que l'affinité $\mathcal{A}'$ de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$ est l'inverse de $\mathcal{A}$.

2 Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$. On considère les affinités suivantes : $\mathcal{A}_0$ définie par $\mathcal{A}_0(x,y) = (x, \frac{1}{\lambda}y)$, de base $\{y = 0\}$, de direction $\mathbf{R}(0,1)$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$ et $\mathcal{A}_1$ définie par $\mathcal{A}_1(x,y) = (x, 1+\lambda(y-1))$, de base $\{y = 1\}$, de direction $\mathbf{R}(0,1)$ et de rapport λ.
a. Montrer que $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_0$ est une translation de vecteur $(0, 1-\lambda)$.
b. Que vaut $(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_0)^2$ si $\lambda = \frac{1}{2}$.

3 Soit $\mathcal{A}$ une affinité de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport λ et $\mathcal{G}$ un automorphisme affine de $\mathbf{R}^2$. Montrer que $\mathcal{G} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{G}$ est l'affinité de base $\mathcal{G}(\delta)$, de direction $\mathbf{R}L_{\mathcal{G}}(v)$ et de rapport λ.

4 Soit une droite affine δ de $\mathbf{R}^2$ et p,q deux distincts hors de δ.
a. On suppose que la droite δ' qui contient p et q n'est pas parallèle à δ. Montrer qu'il existe une affinité $\mathcal{A}$ de base δ et de direction $\mathbf{R}\overrightarrow{pq}$ telle que $\mathcal{A}(p) = q$.
b. On suppose que la droite δ' qui contient p et q est parallèle à δ. Soit r un point hors de δ et de δ'. En appliquant le résultat précédent à p et r puis à r et q montrer qu'il existe deux affinités $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de base δ telles que $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1(p) = q$.

5 Soit o, p et q trois points de $\mathbf{R}^2$ avec $p \neq q$. Montrer qu'il existe une droite δ qui passe par o et qui n'est pas parallèle à la droite qui contient p et q.

6 Soit (p_1, p_2, p_3) et (q_1, q_2, q_3) deux repères affines de $\mathbf{R}^2$. Montrer qu'il existe quatre affinités $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ telles que
i. $\mathcal{A}_1(p_1) = q_1$,
ii. $\mathcal{A}_2(q_1) = q_1$, $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1(p_2) = q_2$,
iii. $\mathcal{A}_3(q_1) = \mathcal{A}_4(q_1) = q_1$, $\mathcal{A}_3(q_2) = \mathcal{A}_4(q_2) = q_2$, $\mathcal{A}_4 \circ \mathcal{A}_3 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1(p_3) = q_3$.