Examen - 2nde session - 2heures

Les documents, ordinateurs, téléphones et calculatrices sont interdits.

I (4pts)

1 Définition d'une application affine.

2 Énoncé du théorème de Pappus.

3 Définition des coordonnées barycentriques.

4 Définition du birapport de quatre nombres réels.

II (5pts) Soient $a_0 = (-2,0)$, $a_1 = (-1,-1)$, $a_2 = (2,0)$ et $a_3 = (1,1)$ quatre points de $\mathbf{R}^2$. Montrer que l'ensemble G des automorphismes affines de $\mathbf{R}^2$ qui laissent globalement invariant $\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$ est un groupe à huit éléments que l'on explicitera.

III (5pts)

1 Soit a_1,a_2,a_3,a_4 quatre réels distincts. Montrer

$$\begin{aligned}
[a_1,a_2,a_3,a_4]\times[a_2,a_1,a_3,a_4] &= 1\\
[a_1,a_2,a_3,a_4]\times[a_1,a_2,a_4,a_3] &= 1\\
[a_1,a_2,a_3,a_4]+[a_4,a_2,a_3,a_1] &= 1
\end{aligned}$$

et en déduire que $[a_1,a_2,a_3,a_4]$, $[a_2,a_1,a_4,a_3]$, $[a_3,a_4,a_1,a_2]$ et $[a_4,a_3,a_2,a_1]$ sont égaux.

2 Soient δ,δ',δ'' trois droites de $\mathbf{R}^2$ concourantes en un point a et soient $b,c,d\in\delta$, $c',d'\in\delta'$ et $c'',d''\in\delta''$ tels que $c'c''$ et $d'd''$ parallèles, c,c',c'' alignés, d,d',d'' alignés, c',b,d'' alignés et d',b,c'' alignés. Faire une figure et calculer $[a,b,c,d]$ dans une situation non dégénérée.

IV (6pts) Si $t\in\mathbf{R}$ on note D_t la droite $D_t=\{y=t\}$. Soit $\mathcal{A}$ une application affine de $\mathbf{R}^2$ telle que $\mathcal{A}(D_0)=D_0$ et $\mathcal{A}(D_1)=D_1$. On note π l'application affine définie par $\pi(x,y)=y$.

1 Montrer que $\mathcal{A}$ est un automorphisme affine.

2 Calculer $\pi(\mathcal{A}(x,0))$ et $\pi(\mathcal{A}(x,1))$ et en déduire $\pi(\mathcal{A}(x,y))$ si $(x,y)\in\mathbf{R}$.

3 Montrer que si $t\in\mathbf{R}$ alors $\mathcal{A}(D_t)=D_t$.

4 Matrice de la partie linéaire de $\mathcal{A}$ par rapport à la base $(e_1,e_2)=((1,0),(0,1))$.

5 Montrer que si $\mathcal{A}(0,0)=(0,0)$ alors $\mathcal{A}$ est une transvection ou une affinité alors que si $\mathcal{A}$ n'a pas de point fixe c'est une translation.