Université de Rennes I — **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (D05) — **Juin 2006**

Corrigé de la 2nde session

I (6pts)

1 Définition d'une symétrie affine et d'une projection affine. Une projection affine est un endomorphisme affine qui coïncide avec son carré. Une symétrie affine est un endomorphisme affine dont le carré est l'identité.

2 Énoncés des théorèmes de Desargues et Pappus.
(Desargues et parallèles) Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois droites distinctes, concourantes ou parallèles, $a_i, b_i \in \delta_i, i = 1,2,3$ sont des points distincts de l'éventuel point commun aux trois droites et si a_1a_2 et b_1b_2 sont parallèles ainsi que a_2a_3 et b_2b_3 alors a_1a_3 et b_1b_3 sont parallèles.
(Pappus, parallèles et translations) Soient $\delta \neq \delta'$ deux droites parallèles d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient $a, b, c \in \delta$ et $a', b', c' \in \delta'$. On suppose les droites ab' et ba' parallèles et les droites bc' et cb' parallèles. Alors les droites ca' et ac' sont parallèles.

3 Énoncé du théorème d'incidence. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigés respectivement par F et G. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont au moins un point commun alors

$$\dim < \mathcal{F} \cup \mathcal{G} > = \dim(F+G).$$

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints alors

$$\dim < \mathcal{F} \cup \mathcal{G} > = 1 + \dim(F+G),$$

et si de plus $\dim \mathcal{E} < +\infty$ alors

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} < \dim \mathcal{E} + \dim F \cap G.$$

4 Caractérisation barycentrique des applications affines. Une application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si pour toute famille $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ le barycentre des $(\mathcal{A}(p_i), \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ est l'image par $\mathcal{A}$ du barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$.

II (3pts) Soit a, b, c trois points distincts et non alignés d'un plan affine et a' le milieu de b et c, b' le milieu de c et a, c' le milieu de a et b et g l'isobarycentre de a, b et c.

1 Montrer que les droites aa', bb' et cc' se coupent en g. Le triplet (a,b,c) est un repère affine. Par rapport à celui-ci les coordonnées barycentriques de a, b, c, a', b', c' et g sont respectivement $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1/2,1/2)$, $(1/2,0,1/2)$, $(1/2,1/2,0)$ et $(1/3,1/3,1/3)$. Les coordonnées barycentriques de g sont combinaison linéaire des coordonnées barycentriques de a et a' :

$$(1/3,1/3,1/3) = 1/3(1,0,0) + 2/3(0,1/2,1/2).$$

Par conséquent g est sur la droite aa'. On montre de même que g est sur les droites bb' et cc'.

2 Montrer qu'il existe une unique application affine $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}(a) = b, \mathcal{A}(b) = c$ et $\mathcal{A}(c) = a$. Toute application d'un repère affine dans un espace affine s'étend de façon unique en une application affine. Ainsi, puisque (a,b,c) est un repère, $\mathcal{A}$ existe et est unique.

3 Calculer $\mathcal{A}(g)$. Puisque g est l'isobarycentre de (a,b,c), le point $\mathcal{A}(g)$ est l'isobarycentre des points $\mathcal{A}(a)$, $\mathcal{A}(b)$ et $\mathcal{A}(c)$ c'est à dire du triplet (b,c,a). Puisque on ne change pas l'isobarycentre par permutation on a $\mathcal{A}(g) = g$.

III (11pts) On rappelle que si δ est une droite affine de $\mathbf{R}^2$, v un vecteur non nul qui ne dirige pas δ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors l'affinité de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport λ est l'application $\mathcal{A}$ telle que si $p \in \delta$ et $t \in \mathbf{R}$ alors $\mathcal{A}(p+tv) = p + \lambda tv$.

1 Soit $\mathcal{A}$ une affinité de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport $\lambda \neq 0$. Montrer que l'affinité $\mathcal{A}'$ de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$ est l'inverse de $\mathcal{A}$. Soit q un point de $\mathbf{R}^2$. Il existe un unique couple $(p,t) \in \delta \times \mathbf{R}$ tel que $q=p+tv$. On a donc $\mathcal{A}(q)=\mathcal{A}(p+tv)=p+\lambda tv$ et $\mathcal{A}'(\mathcal{A}(q)=\mathcal{A}'(\mathcal{A}(p+tv))=p+\frac{1}{\lambda}(\lambda t)v=p+tv=q$. Par conséquent $\mathcal{A}'$ est bien l'inverse à gauche de $\mathcal{A}$. C'est suffisant pour conclure car $\mathcal{A}$ est un endomorphisme affine d'un plan.

2 Soit $\lambda\in\mathbf{R}^*$. On considère les affinités suivantes : $\mathcal{A}_0$ définie par $\mathcal{A}_0(x,y)=(x,\frac{1}{\lambda}y)$, de base $\{y=0\}$, de direction $\mathbf{R}(0,1)$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$ et $\mathcal{A}_1$ définie par $\mathcal{A}_1(x,y)=(x,1+\lambda(y-1))$, de base $\{y=1\}$, de direction $\mathbf{R}(0,1)$ et de rapport λ.

a. Montrer que $\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_0$ est une translation de vecteur $(0,1-\lambda)$.

b. Que vaut $(\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_0)^2$ si $\lambda=\frac{1}{2}$.

a. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. On a $\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_0(x,y)=\mathcal{A}_1(x,\frac{1}{\lambda}y)=(x,1+\lambda(\frac{1}{\lambda}y-1))$ et donc $\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_0(x,y)=(x,(1-\lambda)+y)=(0,(1-\lambda))+(x,y)$. Ainsi $\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_0$ est une translation de vecteur $(0,1-\lambda)$.
b. Si $\lambda=\frac{1}{2}$ alors $(\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_0)^2$ est la translation de vecteur $(0,1)$.

3 Soit $\mathcal{A}$ une affinité de base δ, de direction $\mathbf{R}v$ et de rapport λ et $\mathcal{G}$ un automorphisme affine de $\mathbf{R}^2$. Montrer que $\mathcal{G}\circ\mathcal{A}\circ\mathcal{G}$ est l'affinité de base $\mathcal{G}(\delta)$, de direction $\mathbf{R}L_{\mathcal{G}}(v)$ et de rapport λ.

Puisque $\mathcal{G}$ est un automorphisme du plan $\mathcal{G}(\delta)$ est une droite affine et le vecteur $w=L_{\mathcal{G}}(v)$ est non nul. Soit $q\in\mathcal{G}(\delta)$ et $t\in\mathbf{R}$. Soit $p\in\delta$ tel que $q=\mathcal{G}(p)$. On a $\mathcal{G}^{-1}(q)=p$ et $L_{\mathcal{G}}^{-1}(w)=v$. Par conséquent $\mathcal{G}^{-1}(q+tw)=p+tv$, $\mathcal{A}\circ\mathcal{G}^{-1}(q+tw)=p+\lambda tv$ et donc $\mathcal{G}\circ\mathcal{A}\circ\mathcal{G}^{-1}(q+tw)=q+\lambda tw$. Ceci montre que $\mathcal{G}\circ\mathcal{A}\circ\mathcal{G}^{-1}$ est l'affinité de base $\mathcal{G}(\delta)$, de direction $\mathbf{R}L_{\mathcal{G}}(v)$ et de rapport λ.

4 Soit une droite affine δ de $\mathbf{R}^2$ et p,q deux distincts hors de δ.

a. On suppose que la droite δ' qui contient p et q n'est pas parallèle à δ. Montrer qu'il existe une affinité $\mathcal{A}$ de base δ et de direction $\mathbf{R}\overrightarrow{pq}$ telle que $\mathcal{A}(p)=q$.

b. On suppose que la droite δ' qui contient p et q est parallèle à δ. Soit r un point hors de δ et de δ'. En appliquant le résultat précédent à p et r puis à r et q montrer qu'il existe deux affinités $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de base δ telles que $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p)=q$.

a. Les droites δ et pq ne sont pas parallèles et sont dans un plan. Leur intersection est un point r. Puisque p et q sont distincts et hors de δ, les trois points p,q et r sont distincts. Puisqu'ils sont alignés, il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ non nul et différent de 1 tel que $\overrightarrow{rq}=\lambda\overrightarrow{rp}$. L'affinité $\mathcal{A}$ de base δ, de direction $\mathbf{R}\overrightarrow{pq}$ et de rapport λ est telle que $\mathcal{A}(p)=q$.
b. Puisque r n'appartient pas à la droite $\delta'=pq$, les droites pr et rq ne sont pas parallèles à δ' et ni à δ qui est parallèle à δ. De plus r n'appartient pas à la droite δ. On peut donc appliquer les conclusions de la sous-question précédente à δ,p et r puis à δ,r et q. On obtient ainsi deux affinités $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de base δ telles que $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p)=q$.

5 Soit o,p et q trois points de $\mathbf{R}^2$ avec $p\neq q$. Montrer qu'il existe une droite δ qui passe par o et qui n'est pas parallèle à la droite qui contient p et q. Puisque p et q sont différents ils définissent une droite pq. Si o appartient à la droite pq on choisit un point r hors de pq, les points o et r sont distincts et la droite $\delta=or$ répond à la question. Si o n'appartient pas à la droite pq, la droite $\delta=op$ répond à la question.

6 Soit (p_1,p_2,p_3) et (q_1,q_2,q_3) deux repères affines de $\mathbf{R}^2$. Montrer qu'il existe quatre affinités $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ telles que
i. $\mathcal{A}_1(p_1)=q_1$,
ii. $\mathcal{A}_2(q_1)=q_1$, $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_2)=q_2$,
iii. $\mathcal{A}_3(q_1)=\mathcal{A}_4(q_1)=q_1$, $\mathcal{A}_3(q_2)=\mathcal{A}_4(q_2)=q_2$, $\mathcal{A}_4\circ\mathcal{A}_3\circ\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_3)=q_3$.

Si $p_1=q_1$ on prend pour $\mathcal{A}_1$ l'identité. Sinon, on considère un point o différent de p_1 et q_1 et d'après la question 5 appliquée au triplet (o,p_1,q_1) il existe une droite δ_1 qui passe par o et qui n'est pas parallèle à la droite p_1q_1. D'après la question 4.a il existe une affinité $\mathcal{A}_1$ de base δ_1 telle que $\mathcal{A}_1(p_1)=q_1$.
Si $\mathcal{A}_1(p_2)=q_2$ on prend l'identité comme affinité $\mathcal{A}_2$. Sinon, d'après la question 5 appliquée au triplet $(q_1,\mathcal{A}_1(p_2),q_2)$ il existe une droite δ_2 qui passe par q_1 et qui n'est pas parallèle à la droite $\mathcal{A}_1(p_2)q_2$. D'après la question 4.a il existe une affinité $\mathcal{A}_2$ de base δ_2 telle que $\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_1(p_2))=q_2$. Puisque $q_1\in\delta_2$ on a $\mathcal{A}_2(q_1)=q_1$.
Si $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_3)=q_3$ on prend l'identité pour $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$. Supposons $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_3)\neq q_3$. Si les droites q_1q_2 et $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_3)q_3$ sont parallèles, d'après la question 4.b il existe deux affinités $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ de base q_1q_2 (qui fixent donc q_1 et q_2) dont la composée $\mathcal{A}_4\circ\mathcal{A}_3$ envoie $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_3)$ sur q_3. Si elles ne sont pas parallèles, d'après la question 4.a il existe une affinité $\mathcal{A}_3$ de base q_1q_2 (qui fixe donc q_1 et q_2) telle que $\mathcal{A}_3$ envoie $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1(p_3)$ sur q_3. On prend alors pour $\mathcal{A}_4$ l'identité.