Université de Rennes I — **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (E05) — **Juin 2005**

Corrigé de la 2ème session

I Voir cours.

II L'image d'un parallélogramme non dégénéré par un automorphisme affine est un parallélogramme non dégénéré. De plus, étant donnés deux parallélogrammes non dégénérés du plan affine, il existe un et un seul automorphisme de ce plan qui envoie le premier parallélogramme sur le second. Or les parallélogrammes non dégénérés obtenus à partir des quatre points a_0, a_1, a_2 et a_3 sont les quadruplets $r_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $r_1 = (a_1, a_2, a_3, a_0)$, $r_2 = (a_2, a_3, a_0, a_1)$, $r_3 = (a_3, a_0, a_1, a_2)$, $s_0 = (a_0, a_3, a_2, a_1)$, $s_1 = (a_1, a_0, a_3, a_2)$, $s_2 = (a_2, a_1, a_0, a_3)$ et $s_3 = (a_3, a_2, a_1, a_0)$: tout autre quadruplet possède des "diagonales" parallèles. Par conséquent, pour $i \in \{0,1,2,3\}$ il existe un unique automorphisme affine R_i qui envoie r_0 sur r_i et un unique automorphisme affine S_i qui envoie r_0 sur s_i et l'ensemble $\{R_0, R_1, R_2, R_3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ est l'ensemble G des automorphismes affines de $\mathbf{R}^2$ qui laissent globalement invariant $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. On remarque que R_0 est l'identité, $S_0 \circ S_0 = R_0$, $R_1 \circ R_i = R_{1+i}$ et $S_i = S_0 \circ R_i = R_{-i} \circ S_0$ si $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. On en déduit que $(G, \circ)$ est stable par composition et que si $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ alors $(R_i)^{-1} = R_{-i}$ et $(S_i)^{-1} = S_i$. Ainsi $(G, \circ)$ est un groupe.

III

1 On a

$$[a_1,a_2,a_3,a_4] = \frac{a_3-a_1}{a_4-a_1}.\frac{a_4-a_2}{a_3-a_2},$$
$$[a_2,a_1,a_3,a_4] = \frac{a_3-a_2}{a_4-a_2}.\frac{a_4-a_1}{a_3-a_1},$$
$$[a_1,a_2,a_4,a_3] = \frac{a_4-a_1}{a_3-a_1}.\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2}$$
$$[a_4,a_2,a_3,a_1] = \frac{a_3-a_4}{a_1-a_4}.\frac{a_1-a_2}{a_3-a_2}.$$

Par conséquent

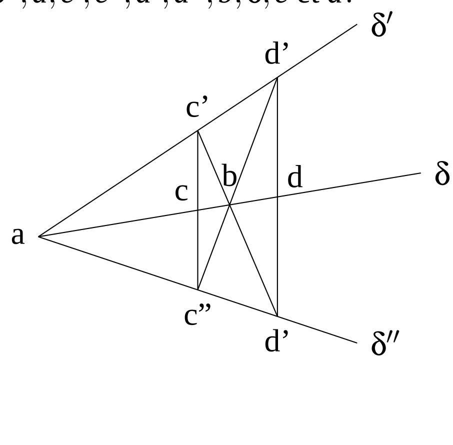
$$\begin{aligned}
[a_1,a_2,a_3,a_4]\times[a_2,a_1,a_3,a_4] &= \frac{a_3-a_1}{a_4-a_1}.\frac{a_4-a_2}{a_3-a_2}.\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2}.\frac{a_4-a_1}{a_3-a_1} &= 1 \quad (i)\\
[a_1,a_2,a_3,a_4]\times[a_1,a_2,a_4,a_3] &= \frac{a_3-a_1}{a_4-a_1}.\frac{a_4-a_2}{a_3-a_2}.\frac{a_4-a_1}{a_3-a_1}.\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2} &= 1 \quad (ii)\\
[a_1,a_2,a_3,a_4]+[a_4,a_2,a_3,a_1] &= \frac{a_3-a_1}{a_4-a_1}.\frac{a_4-a_2}{a_3-a_2}+\frac{a_3-a_4}{a_1-a_4}.\frac{a_1-a_2}{a_3-a_2} &= 1 \quad (iii).
\end{aligned}$$

D'où :

- $[a_1,a_2,a_3,a_4] = 1/[a_2,a_1,a_3,a_4] = [a_2,a_1,a_4,a_3]$ (par (i) puis (ii)) et
- $[a_1,a_2,a_3,a_4] = 1-[a_4,a_2,a_3,a_1] = 1-1/[a_2,a_4,a_3,a_1] = 1-[a_2,a_4,a_1,a_3] = [a_3,a_4,a_1,a_2]$ (par (iii), (i), (ii) et (iii)).

En appliquant la seconde puis la première de ces deux identités on obtient $[a_1,a_2,a_3,a_4] = [a_4,a_3,a_2,a_1]$.

2 Je dessine successivement $\delta', \delta'', a, c', c'', d', d'', b, \delta, c$ et d.



Les conditions données d'alignement et de parallélisme ainsi que l'hypothèse de non dégénérescence impliquent qu'il existe deux homothéties non nulles h_a et h_b de centres respectifs a et b, de rapports opposés λ et $-\lambda$ et telles que $h_a(c') = d', h_a(c'') = d''$ alors que $h_b(c') = d'', h_b(c'') = d'$. On a donc $h_a(c) = d = h_b(c)$. Par conséquent $\overrightarrow{ad} = \lambda\overrightarrow{ac}$ et $\overrightarrow{bd} = -\lambda\overrightarrow{bc}$ et ces vecteurs ne sont pas nuls. Ainsi $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}\frac{\overline{bd}}{\overline{ad}} = -1$ c'est à dire $[a,b,c,d] = -1$.

IV

1 Si $\mathcal{A}$ n'était pas un automorphisme affine alors $\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$ serait inclus dans une droite affine. Or $D_0 = \mathcal{A}(D_0)$ et $D_1 = \mathcal{A}(D_1)$ sont deux droites affines dont la réunion n'est pas incluse dans une droite affine. Ainsi $\mathcal{A}$ est un automorphisme affine.

2 On a $\pi(\mathcal{A}(x,0)) = 0$ et $\pi(\mathcal{A}(x,1)) = 1$ puisque chacune des droites horizontales D_0 et D_1 est globalement invariante. Or les points $(0,0)$ $(0,1)$ et $(1,0)$ forment un repère affine de $\mathbf{R}^2$. La connaissance de la forme linéaire $\pi\circ\mathcal{A}$ en ces points et donc suffisante pour déterminer $\pi\circ\mathcal{A}$. On peut donc en déduire que $\pi(\mathcal{A}(x,t)) = t$ si $(x,t)\in\mathbf{R}^2$.

3 Soit $t\in\mathbf{R}$. D'après la question précécente $\mathcal{A}(D_t)\subset D_t$. Or $\mathcal{A}(D_t)$ est une droite car $\mathcal{A}$ est un automorphisme affine et D_t est une droite. Or une droite ne contient qu'une droite, elle même. Ainsi $D_t = \mathcal{A}(D_t)$.

4 Puisque $\pi(\mathcal{A}(x,t)) = t$ et que $\mathcal{A}$ est un automorphisme, la matrice de la partie linéaire de $\mathcal{A}$ par rapport à la base (e_1,e_2) est $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = A$ avec $\lambda\neq 0$.

5 On suppose que $(0,0)$ est fixé par $\mathcal{A}$. Si $\lambda\neq 1$ l'application $\mathcal{A}$ est une affinité parallèlement à la direction $\mathbf{R}e_1$ et de base la droite qui passe par l'origine et qui est dirigée par $(\frac{\mu}{1-\lambda},1)$. Si $\lambda = 1$ alors $\mathcal{A}$ est une transvection de base la droite D_0.

On suppose que $\mathcal{A}$ n'a pas de point fixe. Le point $\mathcal{A}(0,0)$ est de la forme $(x_0,0)$ avec $x_0\neq 0$. De plus le système $A\left(\begin{smallmatrix}x\\ t\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}x_0\\ 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x\\ t\end{smallmatrix}\right)$ n'a pas de solution. Ça signifie que l'équation $(1-\lambda)x = x_0 + \mu t$ d'inconnue (x,t) n'admet pas de solution. Ce n'est possible que si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi $\mathcal{A}$ est la translation de vecteur $(x_0,0)$.