Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (D05) **Janvier 2006**

Corrigé de la 1ère session

I (5pts)

1Définition d'une application affine. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés respectivement par E et F. Une application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe $o \in \mathcal{E}$ tel que l'application $L_{\mathcal{A},o} : E \to F$ qui à $v \in E$ associe $\overrightarrow{\mathcal{A}(o)\mathcal{A}(o+v)}$ soit linéaire.

2 Caractérisation des homothéties et translations. Un automorphisme affine $\mathcal{A}$ est une homothétie si et seulement s'il existe un point o tel que $\mathcal{A}(\delta) = \delta$ quelque soit la droite δ qui passe par o. C'est une translation différente de l'identité si et seulement s'il est sans point fixe et il existe une droite vectorielle D telle que $\mathcal{A}(\delta) = \delta$ quelque soit la droite δ dirigée par D.

3 Définition des coordonnées barycentriques. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n finie et soit $(p_i)_{i=0,\dots,n}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine $\{\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$ de $\mathbf{K}^{n+1}$. L'application θ qui à $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{H}$ associe le barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i=0,\dots,n}$ est un isomorphisme affine de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}$ et $(\mathbf{K}^{n+1}, \theta^{-1})$ est une enveloppe vectorielle de $\mathcal{E}$ qui est appelée coordonnées barycentriques (par rapport au repère affine $(p_i)_{i=0,\dots,n}$).

4 Définition et exemple d'une transvection. Soit $\mathcal{E}'$ un hyperplan affine d'un espace affine $\mathcal{E}$. Une transvection de base $\mathcal{E}'$ est une application affine τ qui fixe $\mathcal{E}'$ et tel que $\overrightarrow{x\tau(x)} \in E'$ si $x \in \mathcal{E}$.

II (2pts) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbf{R}^3$ qui ne contient pas l'origine. Montrer que $\mathcal{P}$ contient les points $p = (2,1,0)$ et $q = (3,0,1)$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : tx - (1+2t)y - (1+3t)z + 1 = 0\}$. Si $t \in \mathbf{R}$ alors $(t, -(1+2t), -(1+3t)) \neq (0,0,0)$ et donc $tx - (1+2t)y - (1+3t)z + 1 = 0$ est une équation cartésienne d'un plan affine. En remplaçant x, y et z par les coordonnées de p, q et l'orgine on remarque que ce plan contient p et q mais pas l'origine. Inversement puisque $\mathcal{P}$ ne contient pas l'origine il admet une équation cartésienne de la forme $t'x + uy + vz + 1 = 0$ avec $(t', u, v) \neq (0,0,0)$. Si le plan $\mathcal{P}$ contient p et q alors p et q vérifient cette équation cartésienne et donc $2t' + u + 1 = 0$ (i.e. $u = -(1+2t')$) et $3t' + v + 1 = 0$ (i.e. $v = -(1+3t')$). En posant $t = t'$ il vient que $\mathcal{P}$ est de la forme $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : tx - (1+2t)y - (1+3t)z + 1 = 0\}$.

III (7pts)

1Montrer que les projections de $\mathbf{R}^3$ dans $\{z = 0\}$ sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x + uz, y + vz, 0)$ où $u, v \in \mathbf{R}$. Une projection sur $\{z = 0\}$ fixe chaque point de ce plan. Or une application affine $\mathcal{A}$ de $\mathbf{R}^3$ est caractérisée par sa partie linéaire A et par $\mathcal{A}(0)$. Si elle fixe point par point le plan $\{z = 0\}$ alors $\mathcal{A}(0) = 0$, $\mathcal{A}$ est linéaire et la matrice de A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} u, v, w \in \mathbf{R}.$$

Si de plus $\mathcal{A}$ est une projection alors $\mathcal{A}(0,0,1) = 0$ et donc $w = 0$. L'application $\mathcal{A}$ est donc bien de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x + uz, y + vz, 0)$ où $u, v \in \mathbf{R}$. Réciproquement une telle application est bien une projection sur le plan $\{z = 0\}$ puisque $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ et les seuls points fixes de $\mathcal{A}$ sont les points de ce plan.

2 Montrer que les symétries de $\mathbf{R}^3$ par rapport à $\{z = 0\}$ sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x + uz, y + vz, -z)$ où $u, v \in \mathbf{R}$. Les points fixes d'une symétrie par rapport à $\{z = 0\}$ sont les points de ce plan. Elle est donc différente de l'identité. D'après la question 1 elle est linéaire et sa matrice dans la base canonique est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} u, v, w \in \mathbf{R}.$$

Le carré d'une telle matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u(1+w) \\ 0 & 1 & v(1+w) \\ 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix} u,v,w \in \mathbf{R}.$$

Or une application affine est une symétrie si et seulement si son carré est l'identité. Par conséquent $\mathcal{A}$ est une symétrie par rapport à $\{z=0\}$ si et seulement si $u,v \in \mathbf{R}$ et $w=-1$. Ainsi une symétrie de $\mathbf{R}^3$ par rapport à $\{z=0\}$ est une application affine de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x+uz, y+vz, -z)$ où $u,v \in \mathbf{R}$.

3 Montrer que les affinités de base $\{z=0\} \subset \mathbf{R}^3$ et différentes de l'identités sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x+uz, y+vz, wz)$ où $u,v,w \in \mathbf{R}$ avec $w \neq 1$. Une affinité de base $\{z=0\}$ fixe chaque point de ce plan. D'après la question 1 elle est linéaire et sa matrice dans la base canonique est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} u,v,w \in \mathbf{R}.$$

Pour que ce soit une affinité il faut et il suffit alors qu'il existe aussi un vecteur $\mathbf{v}$ définissant une direction supplémentaire à celle de $\{z=0\}$ tel que si $p=(p_1,p_2,p_3) \in \mathbf{R}^3$ alors $\overrightarrow{p\mathcal{A}(p)}$ est colinéaire à $\mathbf{v}$. Or $\overrightarrow{p\mathcal{A}(p)} = p_3(u,v,w-1)$. Par conséquent $\mathcal{A}$ est une affinité si $u=v=0, w=1$ et c'est alors l'identité ou si $w \neq 1$ et alors le vecteur $\mathbf{v} = (u,v,w-1)$ et $\mathcal{A}$ est une affinité différente de l'identité.

4 Montrer que les automorphismes affines de $\mathbf{R}^3$ qui fixent point par point le plan $\{z=0\}$ sont les applications affines de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x+uz, y+vz, wz)$ où $u,v,w \in \mathbf{R}, w \neq 0$. D'après 1. une application affine fixe point par point $\{z=0\}$ si et seulement si elle est de la forme $\mathcal{A}(x,y,z) = (x+uz, y+vz, wz)$ où $u,v,w \in \mathbf{R}$. C'est un automorphisme si et seulement son déterminant qui vaut w est différent de 0.

5 Montrer que l'ensemble G des automorphismes affines de $\mathbf{R}^3$ qui fixent point par point le plan $\{z=0\}$ est un sous-groupe du groupe affine. L'ensemble G est non vide : il contient l'identité (prendre $u=v=0, w=1$). Puisque la composée de deux automorphismes affines est un automorphisme affine et que la composée de deux applications affines qui fixent point par point $\{z=0\}$ fixe point par point ce plan, G est stable par composition. L'inverse d'un automorphisme qui fixe point par point $\{z=0\}$ fixe encore point par point ce plan. Par conséquent G est un sous-ensemble non vide du groupe affine $GA(\mathbf{R}^3)$, stable par composition et par passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe de $(GA(\mathbf{R}^3), \circ)$.

6 Montrer que tout élément de G est la composée d'au plus deux affinités de base $\{z=0\}$. Soit $\mathcal{A} \in G$. Alors il existe $u,v,w \in \mathbf{R}, w \neq 0$ tels que $\mathcal{A}(x,y,z) = (x+uz, y+vz, wz)$. Si $w \neq 1$ ou ($u=v=0$ et $w=1$) alors $\mathcal{A}$ est une affinité. Il reste à considérer le cas où $w=1$ et $(u,v) \neq 0$. On observe qu'alors $\mathcal{A}$ est la composée $\mathcal{C} \circ \mathcal{B}$ des deux affinités suivantes : $\mathcal{B}$ qui à (x,y,z) associe $\mathcal{B}(x,y,z) = (x,y,2z)$ et $\mathcal{C}$ qui à (x,y,z) associe $\mathcal{C}(x,y,z) = (x+\frac{u}{2}z, y+\frac{v}{2}z, \frac{1}{2}z)$.

7 Reconnaître les éléments de G qui ne sont pas des affinités. Un élément $\mathcal{A}$ de G qui n'est pas une affinité est une transvection de base $\{z=0\}$ car il fixe point par point ce plan et pour tout point p de $\mathbf{R}^3$ le vecteur $\overrightarrow{p\mathcal{A}(p)}$ est dans la direction de $\{z=0\}$.

IV (4pts) On considère les deux plans affines de $\mathbf{R}^3$ définis par $P_1 = \{x+2y+3z=1\}$ et $P_2 = \{x+2y+3z=2\}$ ainsi que le point $m=(1,1,1)$.

1 Montrer que P_1 et P_2 sont parallèles et qu'ils ne contiennent pas m. Les ensembles P_1 et P_2 sont deux plans parallèles. Leur direction commune est le plan vectoriel $P_0 = \{x+2y+3z=0\}$. Ils sont disjoints car $1 \neq 2$. On a $1\times1+2\times1+3\times1 = 6$ donc $m=(1,1,1) \notin P_1 \cup P_2$.

2 Montrer que si $p_1 \in P_1$ alors la droite mp_1 coupe le plan P_2 en un unique point p_2. Soit $p_1 \in P_1$ La droite mp_1 n'est pas dans P_1 car $m \notin P_1$ et elle rencontre P_1 seulement en p_1. La direction de mp_1 est donc supplémentaire à la direction P_0 de P_1 qui est la direction de P_2. D'après le théorème d'incidence, mp_1 et P_2 s'intersectent donc en un unique point p_2.

3 Montrer que l'application $h : P_1 \to P_2$ qui à $p_1 \in P_1$ associe l'unique point de mp_1 que contient P_2 est un isomorphisme affine. D'après la question précédente à tout point p_1 on associe un unique point p_2 de P_2 intersection de ce plan avec la droite mp_1. On définit donc une application de P_1 dans P_2. En inversant les rôles de P_1 et P_2 on définit une application g de P_2 dans P_1 en associant à $p_2 \in P_2$ l'unique point d'intersection de la droite mp_2 avec P_1. Par construction on a $g \circ h(p_1) = p_1$ si $p_1 \in P_1$ et $h \circ g(p_2) = p_2$ si $p_2 \in P_2$. Ceci prouve que h est une bijection de P_1 sur P_2 d'inverse g. Fixons un point O_1 de P_1 et considérons l'homothétie f de centre m qui envoie O_1 sur $h(O_1) = O_2$. Cette homothétie n'est pas constante car $f(O_1) \neq f(m)$. Soit $p_1 \in P_1$. Puisque l'homothétie f préserve toute droite qui passe par m, $f(p_1)$ est sur la droite mp_1. L'image du plan P_1 par l'homothétie f est l'unique plan parallèle à P_1 qui passe par O_2 : c'est P_2. Finalement le point $f(p_1)$ est l'unique point d'intersection de P_2 et de mp_1 : $f(p_1) = h(p_1)$. Ainsi h est la restriction de f à P_1. C'est un isomorphisme affine.

4 Montrer que h s'étend en une homothétie H de $\mathbf{R}^3$ dont on précisera le centre et le rapport. L'application f est une homothétie H qui est bien une extension de h à $\mathbf{R}^3$. Son centre est m. Le point $p_1 = (-4,1,1)$ appartient à P_1 et la droite mp_1 coupe le plan P_2 en $p_2 = (-3,1,1)$. On a $\overrightarrow{mp_1} = (-5,0,0)$ et $\overrightarrow{mp_2} = (-4,0,0) = \frac{4}{5}\overrightarrow{mp_1}$. Par conséquent le rapport de f est $\frac{4}{5}$.

V (2pts) Dessiner quatre points qui ne forment pas un parallélogramme et construire à la règle et au compas l'isobarycentre de ces quatre points. Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 les quatre points. Le barycentre de ces points est le milieu G des milieux I et J des paires $\{A_1, A_2\}$ et $\{A_3, A_4\}$. Pour construire G à la règle et au compas il suffit donc de savoir construire à la règle et au compas le milieu de deux points.