Corrigé de la 1ère session

I Voir cours.

II

1 Puisque b_{ij} est le milieu de (a_i,a_j) on a $\overrightarrow{a_ib_{ij}}+\overrightarrow{a_jb_{ij}}=0$. Ceci donne par Chasles $2\overrightarrow{a_ib_{ij}}+\overrightarrow{a_ja_i}=0$ ou encore $\overrightarrow{a_ib_{ij}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a_ia_j}$ c'est à dire $h_i(a_j)=b_{ij}$. L'égalité $b_{ij}=b_{ji}$ résulte de $\overrightarrow{a_ib_{ij}}+\overrightarrow{a_jb_{ij}}=0=\overrightarrow{a_jb_{ji}}+\overrightarrow{a_ib_{ji}}$. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. Ainsi $b_{ij}b_{ik}=h_i(a_ja_k)$ est parallèle à a_ja_k. Ces résultats appliqués avec $i=2,j=1,k=3$ puis $i=4,j=1,k=3$ montrent que $b_{12}b_{23}=b_{21}b_{23}$ est parallèle à $b_{41}b_{43}=b_{41}b_{34}$. De même avec $i=3,j=2,k=4$ et $i=1,j=2,k=4$ on obtient que $b_{23}b_{34}$ est parallèle à $b_{12}b_{41}$. Par conséquent $(b_{12},b_{23},b_{34},b_{41})$ est un parallélogramme.

2 Fixons une origine o. On a $\overrightarrow{ob_{12}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_2})$, $\overrightarrow{ob_{34}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_3}+\overrightarrow{oa_4})$ et $\overrightarrow{oM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{ob_{12}}+\overrightarrow{ob_{34}})$. Par conséquent $\overrightarrow{oM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_3}+\overrightarrow{oa_4})$ ou encore

$$\overrightarrow{oM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_3}+\overrightarrow{oa_4}+\overrightarrow{oa_1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_3})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_4}+\overrightarrow{oa_1}))$$

c'est à dire $\overrightarrow{oM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{ob_{23}}+\overrightarrow{ob_{41}})$ car $\overrightarrow{ob_{23}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_3})$ et $\overrightarrow{ob_{41}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_4}+\overrightarrow{oa_1})$. Ceci signifie que M est le milieu de (b_{23},b_{41}).

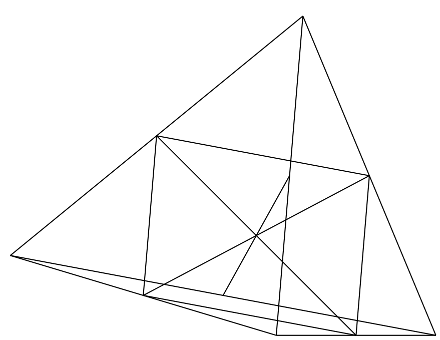
3 On déduit aussi de l'égalité $\overrightarrow{oM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_3}+\overrightarrow{oa_4})$ que

$$\overrightarrow{oM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_3}+\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_4})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_3})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_4}))$$

c'est à dire $\overrightarrow{oM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{ob_{13}}+\overrightarrow{ob_{24}})$ car $\overrightarrow{ob_{13}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_3})$ et $\overrightarrow{ob_{24}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_4})$. Ceci signifie que M est le milieu de (b_{13},b_{24}).

4 L'égalité $\overrightarrow{oM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{oa_1}+\overrightarrow{oa_2}+\overrightarrow{oa_3}+\overrightarrow{oa_4})$ signifie que M est l'isobarycentre de (a_1,a_2,a_3,a_4).

5



III

1 L'ensemble $\delta=\{(x-yt,y+xt):t\in\mathbf{R}\}$ est une droite affine qui passe par q (prendre $t=0$) et dirigée par la droite vectorielle $D=\mathbf{R}(-y,x)$.

2 Si $i=1,2$ les droites δ_i et δ ont au plus un point en commun car elles sont différentes ($q\notin\delta_i$). Deux calculs élémentaires donnent $q_1=(\frac{x^2+y^2}{x},0)$ et $q_2=(0,\frac{x^2+y^2}{y})$.

3 On a $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=1$ et $\overrightarrow{q_1q}=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\overrightarrow{q_1q_2}$. Par conséquent q est le barycentre de q_1 et q_2 affectés des masses $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

4 Puisque $z+(1-z)=1$ et que $(z,0)=z\overrightarrow{p_0p_1}$ et $(0,z)=z\overrightarrow{p_0p_1}$ le point $(z,0)$ (respectivement $(0,z)$) est le barycentre de p_1 et p_0 (respectivement p_2 et p_0) affectés des masses z et $(1-z)$.

5 Soit $q=(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Si $q=(z,0)$ ($q\in\delta_1$) ou $q=(0,z)$ ($q\in\delta_2$) alors d'après la question précédente l'hypothèse sur A implique que $q\in A$.

Si $q=(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus(\delta_1\cup\delta_2)$ alors d'après les questions 1 et 2 il existe $q_1\in\delta_1$ et $q_2\in\delta_2$ tels que q,q_1,q_2 alignés. D'après la première partie de la réponse $q_1,q_2\in A$. D'après la troisième question et l'hypothèse sur A on a $q\in A$.

Ainsi $A=\mathbf{R}^2$.

IV

1 L'ensemble $\mathscr{T}$ est le sous-espace affine de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ qui contient

$$M_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et qui est dirigé par le plan vectoriel engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

La partie linéaire de l'application $t\in\mathbf{R}^2\mapsto M_t$ est l'application qui à $t=(t_1,t_2)\in\mathbf{R}^2$ associe

$$M_t-M_0=\begin{pmatrix}0&0&t_1\\0&0&t_2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

C'est un isomorphisme linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans le plan vectoriel qui dirige $\mathscr{T}$. Par conséquent $t\in\mathbf{R}^2\mapsto M_t\in\mathscr{T}$ est un isomorphisme affine.

2 Si $t,t'\in\mathbf{R}^2$ alors

$$M_t\times M_{t'}=\begin{pmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&t'_1\\0&1&t'_2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&t_1+t'_1\\0&1&t_2+t'_2\\0&0&1\end{pmatrix}=M_{t+t'}.$$

Ainsi $\mathscr{T}$ qui est non vide est stable par $\times$, l'inverse d'un élément M_t est l'élément M_{-t},

$$(M_t\times M_{t'})\times M_{t''}=M_{(t+t')+t''}=M_{t+(t'+t'')}=M_t\times(M_{t'}\times M_{t''})$$

et

$$M_t\times M_{t'}=M_{t+t'}=M_{t'+t}=M_{t'}\times M_t$$

si $t,t',t''\in\mathbf{R}^2$. Ainsi $(\mathscr{T},\times)$ est un groupe commutatif.

3 Notons G l'ensemble des transvections de base le plan $\{z=0\}$. Si $t\in\mathbf{R}^2$, M_t est la matrice d'une transvection $T_t\in G$. Inversement si $T\in G$ alors T est linéaire, $T(1,0,0)=(1,0,0)$, $T(0,1,0)=(0,1,0)$ et $T(0,0,1)$ est de la forme $(t_1,t_2,1)$. La matrice de T par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est donc dans $\mathscr{T}$. Par conséquent l'application qui à $M_t\in\mathscr{T}$ associe la transvection T_t est une bijection de $\mathscr{T}$ dans G. Puisque d'une part la matrice de la composée d'endorphismes linéaires est le produit des matrices et que d'autre par $(\mathscr{T},\times)$ est un groupe, le sous ensemble G d'endormphismes est stable par composition, cette bijection est un isomorphisme de groupe et $(G,\circ)$ est donc un groupe commutatif.