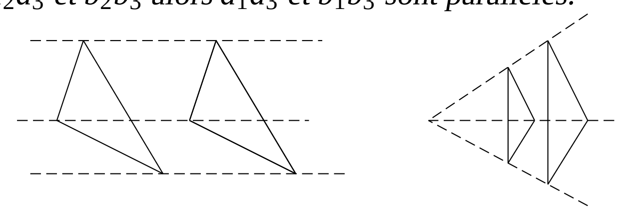
Université de Rennes I — **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (D05) — **29 novembre 2005**

Corrigé du contrôle continu n^{o}3

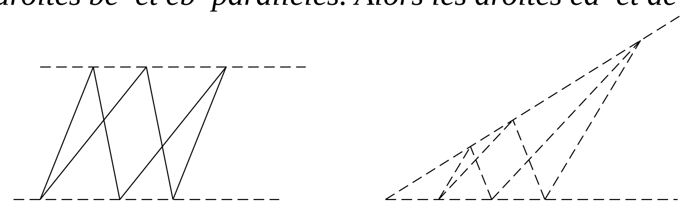
1 (8pts) Théorèmes de Desargues et Pappus.

Théorème de Desargues *Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois droites distinctes, concourantes ou parallèles, $a_i, b_i \in \delta_i, i = 1,2,3$ sont des points distincts de l'éventuel point commun aux trois droites et si a_1a_2 et b_1b_2 sont parallèles ainsi que a_2a_3 et b_2b_3 alors a_1a_3 et b_1b_3 sont parallèles.*



Théorèmes de Pappus I. *Soient $\delta \neq \delta'$ deux droites parallèles d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in \delta$ et $a',b',c' \in \delta'$. On suppose les droites ab' et ba' parallèles et les droites bc' et cb' parallèles. Alors les droites ca' et ac' sont parallèles.*

II. *Le corps $\mathbf{K}$ est commutatif si et seulement si l'énoncé suivant est vrai : "Soient $\delta \neq \delta'$ deux droites concourantes d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in \delta \setminus \delta'$ et $a',b',c' \in \delta' \setminus \delta$. On suppose les droites ab' et ba' parallèles et les droites bc' et cb' parallèles. Alors les droites ca' et ac' sont parallèles."*

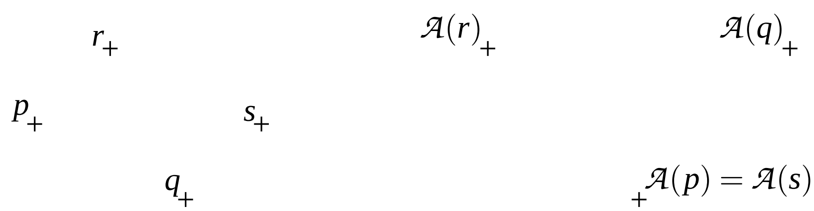


2 Soit $\mathcal{A}$ une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que $\mathcal{A}(0,1) = (0,0), \mathcal{A}(2,0) = (2,2), \mathcal{A}(1,2) = (-2,2)$ et $\mathcal{A}(3,1) = (0,0)$.

a. Représenter les points $p = (0,1)$, $q = (2,0)$, $r = (1,2)$, $s = (3,1)$ et leurs images par $\mathcal{A}$.

b. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas affine.

a.



b. L'application $\mathcal{A}$ n'est pas affine car $\vec{pq} + \vec{pr} = \vec{ps}$ alors que $\overrightarrow{\mathcal{A}(p)\mathcal{A}(q)} + \overrightarrow{\mathcal{A}(p)\mathcal{A}(r)} = (0,4)$ mais $\overrightarrow{\mathcal{A}(p)\mathcal{A}(s)} = (0,0)$.

3 (7pts) a. Caculer la symétrie (de $\mathbf{R}^2$) par rapport à $\{y = 0\}$ et de direction $\mathbf{R}(t,1)$.

b. Montrer qu'une application affine s est une symétrie de $\mathbf{R}^2$ par rapport à $\{y = 0\}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $s(x,y) = (x - 2ty, -y)$.

c. En déduire que $b = (u,v)$ est l'image de $a = (0,1)$ par une symétrie par rapport à $\{y = 0\}$ si et seulement si $v = -1$.

a. Soit s la symétrie de $\mathbf{R}^2$ par rapport à $\{y = 0\}$ et de direction $\mathbf{R}(t,1)$. Elle fixe l'origine donc elles est linéaire. Elle fixe les points de l'axe $\{y = 0\}$ donc elle est de la forme $s(x,y) = (x + \alpha y, \beta y)$. Puisque sa direction est $\mathbf{R}(t,1)$ on a $s(t,1) = (-t,-1)$ et donc $\beta = -1$ et $\alpha = -2t$.

b. D'après la question précédente si s est de la forme $s(x,y) = (x - 2ty, -y)$ alors s est bien une symétrie de $\mathbf{R}^2$ par rapport à $\{y = 0\}$ et parallèlement à la direction $\mathbf{R}(1,t)$. Inversement une symétrie de $\mathbf{R}^2$ par rapport à $\{y = 0\}$ est complètement caractérisée par sa direction qui est en somme directe avec la direction de $\{y = 0\}$. Cette direction est donc de la forme $\mathbf{R}(1,t)$.

c. D'après a. le point b est l'image de a par une symétrie par rapport à $\{y = 0\}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $(u,v) = (-2t,-1)$ c'est à dire si et seulement si $v = -1$.