Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (D05) **25 octobre 2005**

Corrigé du contrôle continu n^{o}2

1 Définition d'une application affine et énoncé du théorème d'incidence.

Application affine *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés respectivement par E et F. Une application $\mathcal{A}:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ est dite affine s'il existe $o\in\mathcal{E}$ tel que l'application $L_{\mathcal{A},o}:E\to F$ qui à $v\in E$ associe $\overrightarrow{\mathcal{A}(o)\mathcal{A}(o+v)}$ soit linéaire.*

Théorème d'incidence *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigés respectivement par F et G. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont au moins un point commun alors*

$$\dim <\mathcal{F}\cup\mathcal{G}>=\dim(F+G).$$

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints alors

$$\dim <\mathcal{F}\cup\mathcal{G}>=1+\dim(F+G),$$

et si de plus $\dim\mathcal{E}<+\infty$ alors

$$\dim\mathcal{F}+\dim\mathcal{G}<\dim\mathcal{E}+\dim F\cap G.$$

2 (3pts) Soient $a,b,c,d\in\mathbf{R}^3$ distincts. Montrer que $(a,(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac},\overrightarrow{cd}))$ est un repère si ab et cd ne sont pas dans un même plan.

Supposons que ab et cd ne soient pas dans le même plan affine. Alors a,b et c ne sont pas alignés et donc $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$ sont indépendants. On en déduit que $(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac},\overrightarrow{cd})$ est une base de $\mathbf{R}^3$. En effet, sinon, puisque $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$ sont indépendants, il existerait $u,v\in\mathbf{R}$ tels que $\overrightarrow{cd}=u\overrightarrow{ab}+v\overrightarrow{ac}$ et donc $\overrightarrow{ad}=u\overrightarrow{ab}+(1+v)\overrightarrow{ac}$: ceci impliquerait que d est dans le même plan que a,b et c et ceci est contraire à l'hypothèse. Puisque $(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac},\overrightarrow{cd})$ est une base, $(a,(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac},\overrightarrow{cd}))$ est un repère.

3 (4pts) Soit $a,b,c,a',b',c'\in\mathbf{R}$ tels que $\det\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b'\end{pmatrix}\neq 0$. Montrer qu'il existe $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ unique tel que $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$. En déduire que des droites affines et non parallèles de $\mathbf{R}^2$ ont un unique point commun.

Puisque $\det\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b'\end{pmatrix}\neq 0$ le système linéaire $\left\{\begin{smallmatrix} ax+by=c \\ a'x+b'y=c'\end{smallmatrix}\right.$ admet un unique couple (x_s,y_s) solution. Soient δ et δ' deux droites affines de $\mathbf{R}^2$ et $ax+by-c=0$ et $a'x+b'y-c'=0$ leurs équations cartésiennes. Elles ne sont pas parallèles si et seulement leurs vecteurs directeurs respectifs $(b,-a)$ et $(b',-a')$ sont indépendants c'est à dire $\det\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b'\end{pmatrix}\neq 0$. Dans ce cas, d'apès ce qui précède $\delta\cap\delta'$ est réduit au point de coordonnées (x_s,y_s).

4 (5pts) Soit un plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathbf{R}^3$, $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)\in\mathcal{P}$ non alignés et $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

On suppose que

$$\Delta=\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\neq 0.$$

Montrer que $x\in\mathcal{P}$ si et seulement si

$$f(x)=\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0.$$

On pose $a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3),o=(0,0,0)$. La fonction f est une forme affine car le développement suivant la dernière colonne d'un déterminant est linéaire en les coefficients. On a $f(a)=f(b)=f(c)=0$ mais $f(o)=\Delta\neq 0$ donc f n'est pas identiquemnt nulle et $f=0$ est l'équation d'un hyperplan affine de $\mathbf{R}^3$ qui contient a,b et c. C'est donc l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$: $f^{-1}(0)=\mathcal{P}$.