Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**
Géométrie affine (D05) **27 septembre 2005**

Corrigé du contrôle continu n$^o 1$

1 Définition d'un espace affine.
Soit $\mathbf{K}$ un corps, $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un ensemble non vide. Munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine dirigé par E c'est lui associer une action simple et transitive du groupe commutatif $(E,+)$.

2 Définition d'une action de groupe simple et transitive.
Une action ϕ d'un groupe $(G,*)$ (de neutre e) sur un ensemble X est une application $\phi : G\times X \to X$ telle que si $g,g'\in G$ et $x\in X$ alors $\phi(g',\phi(g,x)) = \phi(g'*g),x)$ et $\phi(e,x) = x$. L'action est simple si pour tout $(g,x)\in G\times X$ avec $g\neq e$ on a $gx\neq x$. Elle est transitive si pour tout $(x,x')\in X^2$ il existe $g\in G$ tel que $gx = x'$.

3 Soient $n\in\mathbf{N}, n>0$ et $E_1,\dots,E_n$ des droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$ toutes différentes de $E_0 = \{x=0\}$. Montrer qu'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{R}$ tels que $E_i\cap\{x=1\} = \{(1,\lambda_i)\}$ si $i=1,\dots,n$. En déduire que $\mathbf{R}^2\neq E_0\cup\dots\cup E_n$.
Si $i\in\{1,\dots,n\}$, $E_i\neq\{x=0\}$ donc il existe $(a_i,b_i)\in\mathbf{R}^2, a_i\neq 0$ tel que $E_i = \{(a_it,b_it) : t\in\mathbf{R}\}$. Ainsi $E_i\cap\{x=1\} = \{(1,\lambda_i)\}$ où $\lambda_i = b_i/a_i$. Or $\mu = 1+|a_1|+\dots+|a_n|\neq\lambda_i$ si $i\in\{1,\dots,n\}$. Par conséquent $(1,\mu)\in\{x=1\}\setminus(E_0\cup E_1\cup\dots\cup E_n)$ et $(1,\mu)\notin(E_0\cup E_1\cup\dots\cup E_n)$ et $\mathbf{R}^2\neq E_0\cup E_1\cup\dots\cup E_n$.

4 Montrer que l'ensemble F des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la forme $f_{a,b} : x\in\mathbf{R}\mapsto ax+b$ avec $a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0$ est un groupe s'il est muni de la loi de composition des applications. Montrer que l'application $\phi : F\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $\phi(f_{a,b},x) = f_{a,b}(x)$ est une action de groupe qui est transitive mais non simple.
On a $Id_{\mathbf{R}} = f_{1,0}\in F$. De plus, si $a,b\in\mathbf{R}$ avec $a\neq 0$, l'application $f_{a,b}$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et son inverse est $f_{\frac{1}{a},\frac{-b}{a}}$. En outre, si $a',b'\in\mathbf{R}$ avec $a'\neq 0$, on a $f_{a',b'}\circ f_{a,b} = f_{a'a,a'b+b'}\in F$. Ainsi F est un sous-ensemble non vide du groupe $(\mathcal{S}_{\mathbf{R}},\circ)$ des bijections de $\mathbf{R}$, stable par composition et tout élément de F a son inverse dans F. Par conséquent $(F,\circ)$ est un groupe, c'est même un sous-groupe de $(\mathcal{S}_{\mathbf{R}},\circ)$. L'application ϕ est bien une action du groupe $(F,\circ)$ sur $\mathbf{R}$ car

$$\phi(f_{a',b'},\phi(f_{a,b},x)) = f_{a',b'}(f_{a,b}(x)) = (f_{a',b'}\circ f_{a,b})(x) = \phi(f_{a',b'}\circ f_{a,b},x)$$

et $\phi(f_{1,0},x) = x$ si $f_{a,b}, f_{a',b'}\in F$ et $x\in\mathbf{R}$. L'action ϕ est transitive car si $x,x'\in\mathbf{R}$ alors $x' = f_{1,x'-x}(x) = \phi(f_{1,x'-x},x)$. Elle n'est pas simple car $\phi(f_{2,0},0) = 0$ alors que $f_{2,0}$ n'est pas le neutre de F.

5 Montrer que l'ensembles G des applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ de la forme $g_t(x,y) = (x+t, y\exp t)$ avec $t\in\mathbf{R}$ est un groupe s'il est muni de la loi de composition des applications. Montrer que l'application $\psi : G\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ définie par $\psi(g_t,(x,y)) = g_t(x,y)$ est une action de groupe qui est simple et non transitive.
Si $t,t'\in\mathbf{R}$ on a $g_{t'}\circ g_t = g_{t'+t}$ et $g_t\circ g_{-t} = g_{-t}\circ g_t = g_0 = Id$. Ainsi G est un sous-ensemble non vide du groupe $(\mathcal{S}_{\mathbf{R}^2},\circ)$ des bijections de $\mathbf{R}^2$, stable par composition et tout élément de G a son inverse dans G. Par conséquent $(G,\circ)$ est un groupe, c'est même un sous-groupe de $(\mathcal{S}_{\mathbf{R}^2},\circ)$. L'application ψ est bien une action du groupe $(G,\circ)$ sur $\mathbf{R}^2$ car

$$\psi(g_{t'},\psi(g_t,(x,y))) = g_{t'}(g_t(x,y)) = (g_{t'}\circ g_t)(x,y) = \psi(g_{t'}\circ g_t,(x,y))$$

et $\psi(g_0,(x,y)) = (x,y)$ si $g_t,g_{t'}\in G$ et $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. L'action ψ est simple car si $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et $t\in\mathbf{R}$ vérifient $\psi(g_t,(x,y)) = (x,y)$ alors $x+t = x$ et donc $t=0$ et g_t est le neutre de $(G,\circ)$. Elle n'est pas transitive car si $t\in\mathbf{R}$ alors $\psi(g_t,(0,0)) = (t,0)\neq(0,1)$: il n'existe pas de $t\in\mathbf{R}$ tel que $\psi(g_t,(0,0)) = (0,1)$.