Université de Rennes I — **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (D05) — **Mardi 27 septembre 2005**

Contrôle continu n^{o}1 - 30mn

Les documents, ordinateurs, téléphones et calculatrices sont interdits.
Écrire votre nom et répondre sur cette feuille.

Nom :

1 (4pts) Définition d'un espace affine.

2 (4pts) Définition d'une action de groupe simple et transitive.

3 (4pts) Soient $n \in \mathbf{N}, n > 0$ et $E_1, \ldots, E_n$ des droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$ toutes différentes de $E_0 = \{x = 0\}$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $E_i \cap \{x = 1\} = \{(1, \lambda_i)\}$ si $i = 1, \ldots, n$. En déduire que $\mathbf{R}^2 \neq E_0 \cup \ldots \cup E_n$.

4 (4pts) Montrer que l'ensemble F des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la forme $f_{a,b} : x \in \mathbf{R} \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ est un groupe s'il est muni de la loi de composition des applications. Montrer que l'application $\phi : F \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\phi(f_{a,b}, x) = f_{a,b}(x)$ est une action de groupe qui est transitive mais non simple.

5 (4pts) Montrer que l'ensembles G des applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ de la forme $g_t(x,y) = (x + t, y \exp t)$ avec $t \in \mathbf{R}$ est un groupe s'il est muni de la loi de composition des applications. Montrer que l'application $\psi : G \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $\psi(g_t, (x,y)) = g_t(x,y)$ est une action de groupe qui est simple et non transitive.